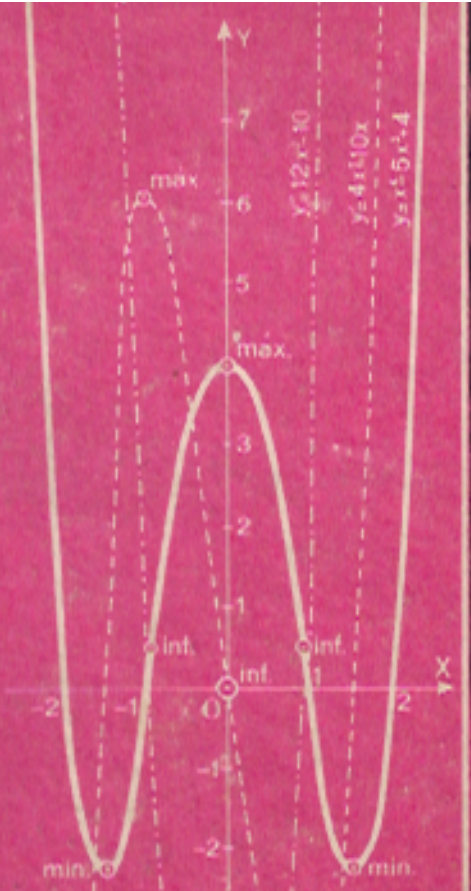

matemáticas

SEXTO CURSO

4 mayo 1963 · B. O. M. E. 11 mayo 1963 · 66 ptas.

MATEMÁTICAS

SEXTO CURSO

Número de Registro: Z. - 1210 - 62

Imprenta Editorial Luis Vives, S. A.
Paseo de Fernando el Católico, 63
ZARAGOZA. — 1963

Depósito legal. Z. 258 - 59

MATEMÁTICAS

SEXTO CURSO

POR

EDELVIVES

Aprobado por O. M. del 4-V-1963
«B. O. M. de E. N.», núm. 38, del 13-V-1963
Año de publicación: 1963. — Precio: 66 ptas.

EDITORIAL LUIS VIVES, S. A
Zaragoza

ÍNDICE

	Págs.
Lección 1.ª — Revisión del número racional	5
Lección 2.ª — El número real	10
Lección 3.ª — Calculatoria de los números reales	21
Lección 4.ª — Nociones sobre límites	31
Lección 5.ª — Cálculo de límites	37
Lección 6.ª — Logaritmos neperianos	47
Lección 7.ª — Las funciones	55
Lección 8.ª — Introducción a la Geometría Analítica	73
Lección 9.ª — Incidencia de rectas	84
Lección 10. — Ángulos y distancias	91
Lección 11. — Derivada de una función	103
Lección 12. — Cálculo de derivadas	113
Lección 13. — Cálculo de derivadas *(continuación)*	122
Lección 14. — Derivada de las funciones circulares	135
Lección 15. — Aplicaciones de las derivadas	144
Lección 16. — Representación gráfica de funciones	156
Lección 17. — Diferencial de una función	171
Lección 18. — La circunferencia	181
Lección 19. — La elipse	191
Lección 20. — La hipérbola	202
Lección 21. — La parábola	215
Lección 22. — La función primitiva	224
Lección 23. — La integral definida	229
Lección 24. — Aplicaciones del cálculo integral	241

1. Revisión del número racional

1. El número natural. — La operación de contar los elementos de un conjunto da lugar a los llamados *números naturales:* 1, 2, 3, 4, ...

Más tarde se introduce el *cero,* que puede considerarse también como un número.

Con estos números se definen las dos operaciones aritméticas fundamentales: la *suma* y la *multiplicación.*

Según se demostró en cursos anteriores, la suma tiene las siguientes propiedades fundamentales, denominadas *leyes formales:*

1.ª PROPIEDAD UNIFORME. — *La suma de varios números es única.*

Ordinariamente se expresa de este modo: *Sumando miembro a miembro varias igualdades resulta otra igualdad.*

De una manera simbólica escribiremos:

Si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, es también $a + b + c = a' + b' + c'$

2.ª PROPIEDAD CONMUTATIVA. — *La alteración del orden de los sumandos no modifica la suma,* es decir:

$$a + b + c = c + a + b$$

3.ª PROPIEDAD ASOCIATIVA. — *La suma no se altera sustituyendo dos o más sumandos por su suma efectuada.* Así:

$$a + b + c = a + (b + c)$$

Análogamente, para la multiplicación se demuestran las siguientes *leyes formales:*

1.ª PROPIEDAD UNIFORME. — *Multiplicando miembro a miembro varias igualdades resulta otra igualdad.* O, de otro modo: *el producto de varios números es único.* En símbolos, escribiremos:

Si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, es también $a \cdot b \cdot c = a' \cdot b' \cdot c'$

2.ª PROPIEDAD CONMUTATIVA. — *La alteración del orden de los factores no modifica el producto.* Así:

$$a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b$$

3.ª PROPIEDAD ASOCIATAVA. — *El producto no se altera sustituyendo dos o más factores por su producto efectuado.* Abreviadamente, escribiremos:

$$a \cdot b \cdot c = a(b \cdot c)$$

La siguiente propiedad establece un enlace entre la suma y la multiplicación.

4.ª PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. — *El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos de cada sumando por dicho número.* Así:

$$(a+b+c)\,m = a \cdot m + b \cdot m + c \cdot m$$

De las anteriores leyes formales se deducen todos los demás teoremas y propiedades referentes a la suma y producto de números naturales.

2. El campo de los números racionales. — La operación inversa de la suma es la *sustracción,* la cual no es posible dentro del campo de los números naturales cuando el minuendo es menor que el sustraendo. Para resolver esta dificultad es necesario introducir los *números negativos,* que se representan colocando delante de los números naturales el signo (−) menos:

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4, \quad -5, \ \ldots$$

Los números naturales y los negativos forman los *números enteros,* cuya sucesión puede expresarse de la siguiente forma:

$$\ldots \ -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ \ldots$$

Continuando con las operaciones aritméticas llegamos a la *división,* que se define como la operación inversa de la multiplicación. Dentro del

campo de los números enteros, la división es posible cuando el dividendo es múltiplo del divisor, pero no lo es cuando dicha condición no se verifica. Para poder continuar el cálculo aritmético es necesario ampliar nuevamente el campo numérico, introduciendo los llamados *números fraccionarios,* que se definen mediante un par de números naturales dados en un cierto orden (numerador y denominador), el segundo distinto de cero, y separados por una raya.

Recordemos lo siguiente respecto de los números fraccionarios o fracciones:

1.º *Si el numerador es cero, la fracción representa el número* 0.

EJEMPLOS: $\frac{0}{3} = 0$; $\frac{0}{11} = 0$

2.º *Si el denominador es la unidad, la fracción representa un número natural igual al numerador.*

EJEMPLOS: $\frac{5}{1} = 5$; $\frac{9}{1} = 9$

3.º *Si el numerador es múltiplo del denominador, la fracción representa un número natural igual al cociente de dividir el numerador por el denominador.*

EJEMPLOS: $\frac{6}{2} = 3$; $\frac{72}{9} = 8$

Teniendo en cuenta las anteriores conclusiones y admitiendo además que los términos de una fracción pueden ser números enteros, positivos o negativos, resulta que con la notación $\frac{a}{b}$ se pueden representar los números naturales, los enteros negativos y los fraccionarios (positivos y negativos); esto es, los números que llamábamos *racionales.*

Según lo expuesto, el conjunto de los números enteros y fraccionarios forman el *campo de los números racionales.* De modo que podemos establecer la siguiente clasificación:

Números *racionales* { enteros ..... { positivos *(naturales)* / negativos ; fraccionarios { positivos / negativos

3. Permanencia de las leyes formales. — Acabamos de ver cómo, a medida que van surgiendo necesidades en el cálculo, se va ampliando el

campo numérico. Pero no creamos que esas ampliaciones pueden hacerse de un modo arbitrario. Han de efectuarse de manera que se conserven las propiedades formales que caracterizan a las operaciones elementales directas. Cuando esto se verifica, no es preciso repetir las demostraciones para los nuevos entes numéricos.

Este es el *principio de permanencia de las leyes formales,* que podemos enunciar así:

Si al introducir nuevos entes en el campo numérico se pueden demostrar con ellos las mismas leyes formales de la suma y producto establecidas para los números naturales, todas las propiedades que sean consecuencia de dichas leyes conservan su validez en el nuevo sistema.

Así se verifica en el campo de los números racionales, siendo posibles en él las operaciones fundamentales, con la sola excepción de que $\frac{a}{0}$ representa infinito. Como es sabido, dicha expresión es un símbolo únicamente y no un concepto numérico.

4. El problema de la medida y el número racional. — Un problema de índole práctica, el problema de la medida, conduce también a la necesidad de introducir los números fraccionarios.

Para medir una longitud, por ejemplo el segmento A (fig. 1), se compara con otro segmento B tomado como unidad. Primero se ve si el seg-

FIG. 1

mento B está contenido un número exacto de veces en A. Si, por ejemplo, está contenido tres veces, decimos que la medida de A al tomar B como unidad, es el número 3, y se escribe

$$A = 3B \quad \text{o bien} \quad \frac{A}{B} = 3$$

Si el segmento unidad B no está contenido un número exacto de veces en el segmento considerado, como sucede con el segmento C, puede ocurrir que, dividida la unidad B en h partes iguales, una de estas partes esté contenida q veces en C. En este caso se dice que la medida del seg-

mento C, al tomar B como unidad, es el número fraccionario $\frac{q}{h}$, y se escribe

$$C = \frac{q}{h}B \quad \text{o bien} \quad \frac{C}{B} = \frac{q}{h}$$

En el caso de la figura 1, es

$$C = \frac{7}{4}B \quad \text{o tambien} \quad \frac{C}{B} = \frac{7}{4}$$

Tanto si la medida es entera como si es fraccionaria, se dice del segmento que es *conmensurable* con la unidad elegida.

Como vemos, se ha llegado por el problema de la medida a obtener los números enteros y los fraccionarios y, por consiguiente, el *número racional.*

EJERCICIOS

1. Valiéndose de la representación de la serie de los números enteros, ¿cómo quedarán definidos los resultados de las siguientes operaciones?:

a) $12 - 7$; *b)* $4 - 9$; *c)* $1 - 22$; *d)* $8 - (5+11)$; *e)* $13 - (15-2)$

2. ¿Es 7 un número racional? ¿Y -7? ¿Y $\frac{7}{8}$? ¿Y $-\frac{7}{8}$?

3. ¿Son racionales los números 3'42, 0'85, 0'62(31)..., -5'(7)...?

4. ¿Será racional un número decimal de infinitas cifras decimales que no forman período? Justificar la contestación.

5. Indicar las leyes formales que se aplican: 1.º, en la transposición de términos de una ecuación; 2.º, al quitar denominadores; 3.º, al efectuar operaciones indicadas; 4.º, al sacar factor común; 5.º, al despejar la incógnita.

6. Resolver la ecuación $\frac{a(x-1)}{2} + \frac{b(x-1)}{3} = 1 - x$, indicando las leyes formales sucesivamente aplicadas.

7. Demostrar que se cumple con los números racionales la propiedad distributiva de la multiplicación estudiada para los números naturales.

8. Supuesto que la cantidad M no es igual a la cantidad U, ¿qué condición han de reunir ambas para que la medida de M, tomando U como unidad, sea un número racional?

9. En un recipiente cabe exactamente el contenido de 17 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro. Se desea saber cuál es, en litros, la capacidad del recipiente y qué clase de número, dentro del campo racional, es dicha medida.

10. Como es sabido, π es un número de infinitas cifras decimales que no llegan a formar período. Según esto, ¿será un número racional la medida de una semicircunferencia expresada en radianes?

2. El número real

5. El número irracional: orígenes aritmético y geométrico. — Todo número racional en forma de fracción irreducible produce, al convertirlo en fracción decimal, una fracción decimal exacta o una fracción decimal periódica.

Inversamente: toda fracción decimal exacta o toda fracción decimal ilimitada periódica tiene una fracción ordinaria por generatriz, es decir, está representada por un número racional. Así,

$$0'875 = \frac{7}{8}; \qquad 0'2727... = \frac{3}{11}; \qquad 0'431818... = \frac{19}{44}$$

Pero existen otras clases de fracciones decimales ilimitadas *no periódicas,* como por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1'4142...; \qquad \pi = 3'1415...; \qquad e = 2'71828182...$$

las cuales no se pueden representar por fracciones ordinarias, no siendo, por tanto, números racionales. A estos números que pueden adoptar una forma decimal, no periódica, de infinitas cifras decimales, se les llama *números irracionales.*

DEFINICIÓN. — *Número irracional es el que admite una representación decimal, no periódica, de infinitas cifras decimales.*

Los números irracionales proceden de estas dos cuestiones aritméticas: *a)* de la logaritmación, cuando el número no es potencia perfecta de la base del sistema, y *b)* de la radicación de números racionales, cuando siendo entero y positivo el índice de la raíz, el radicando no es potencia perfecta del mismo grado.

Además de estos dos problemas, de carácter aritmético, existe otro, de índole geométrica, que da también origen a los números irracionales.

Surge este problema al tratar de medir una cantidad con otra que se toma como unidad, cuando aquélla no contiene exactamente a la unidad

elegida ni a ninguna de sus partes alícuotas, es decir, cuando la cantidad que se quiere medir es *inconmensurable* con la unidad elegida.

Entre los muchos ejemplos de cantidades inconmensurables dados en Geometría, citaremos los dos siguientes:

EJEMPLO 1.º — Al tratar de medir la longitud de la circunferencia tomando como unidad el diámetro, nos encontramos con que dicha medida viene dada por la relación

$$\frac{C}{D} = \pi \quad \text{o bien} \quad \frac{C}{2r} = \pi$$

y el número π, como es sabido, no es ni entero ni fraccionario, sino que puede ir representado por un número decimal no periódico de infinitas cifras decimales, siendo, por tanto, un número irracional.

EJEMPLO 2.º — Asimismo, al pretender medir la diagonal d de un cuadrado tomando como unidad el lado l del mismo, resulta, en virtud del teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 2l^2 \quad \text{de donde} \quad d = \sqrt{2} \cdot l \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{l} = \sqrt{2}$$

Esto nos dice que $\sqrt{2}$ es la medida de d cuando se toma l por unidad. Pero 2 no es cuadrado perfecto, por lo que no tiene raíz cuadrada exacta ni fraccionaria. En consecuencia, $\sqrt{2}$ es un número irracional.

6. El campo de los números reales. — El conjunto de los números *racionales* e *irracionales* constituyen los *números reales.*

Después de esta nueva ampliación del concepto de número, queda así constituído el campo numérico:

Números reales
- racionales
  - enteros
    - positivos *(naturales)*
    - negativos
  - fraccionarios
    - positivos
    - negativos
- irracionales .....
  - positivos
  - negativos

7. Notación del número real. — *Todo número real (racional o irracional) se puede representar por un número decimal de infinitas cifras, significativas o no.*

Así, representaremos un número irracional por uno de sus valores aproximados por defecto. Escribiremos, por ejemplo:

$$\sqrt{3} = 1'73205... \qquad \pi = 3'14159...$$

Para representar un número entero con infinitas cifras decimales, bastará poner ceros en la parte decimal. Así, escribiremos:

$$9 = 9'000... \qquad 62 = 62'000...$$

De igual manera, para representar una fracción decimal exacta se añaden ceros a su derecha. Pondremos, por ejemplo:

$$7'8 = 7'8000... \qquad 4'735 = 4'735000...$$

Es decir que, a los números enteros y a las fracciones decimales exactas se les puede considerar como fracciones decimales periódicas, con período igual a 0.

Finalmente, para representar una fracción ordinaria se transforma antes en decimal. Ésta será exacta o periódica; en el primer caso, ya hemos dicho qué se hace; y, si es periódica, escribiremos cifras hasta que se vea la repetición del período. Por ejemplo:

$$\frac{5}{6} = 0'9333... \qquad \frac{3}{14} = 0'2142857142857...$$

8. Sucesión. — Todo conjunto de números ordenados en la forma

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ ...;\ a_n;\ ...$$

constituyen una *sucesión.* A los números que forman una sucesión se les llama *términos de la sucesión.*

Cuando una sucesión no tiene ningún término último, sino que a todo término sigue siempre otro, la sucesión se llama indefinida. La sucesión general escrita anteriormente es indefinida, y el término a_n recibe el nombre de *término general.*

EJEMPLOS:

La sucesión de los números naturales:

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ ...;\ n;\ ...$$

La sucesión de los cuadrados de los números naturales:

$$1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ ...;\ n^2;\ ...$$

La sucesión

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ ...;\ \frac{1}{n};\ ...$$

Se dice que una sucesión es monótona creciente cuando cada uno de sus términos es igual o menor que el siguiente, y se llama monótona decreciente cuando cada término es igual o mayor que el siguiente (*).

Sea, por ejemplo, $\sqrt{5} = 2'23606...$ Tomando los valores aproximados por defecto con error menor que 0'1, que 0'01, que 0'001, etc., tendremos la sucesión *monótona creciente*

$$2 < 2'2 < 2'23 < 2'236 = 2'2360 < 2'23606 < ...$$

y considerando los valores aproximados por exceso, tendremos la sucesión *monótona decreciente*

$$3 > 2'3 > 2'24 > 2'237 > 2'2361 > 2'23607 > ...$$

En general, para expresar una sucesión monótona creciente, pondremos

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ ... \ \leqq a_n \leqq ...$$

y si es monótona decreciente,

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ ... \ \geqq a_n \geqq ...$$

9. Sucesiones monótonas convergentes. — Dos sucesiones indefinidas de números,

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ ... \ \leqq a_n \leqq ...$$
$$a'_1 \geqq a'_2 \geqq a'_3 \geqq \ ... \ \geqq a'_n \geqq ...$$

son monótonas convergentes si reúnen las siguientes condiciones:

1.ª *La primera es monótona creciente, y la segunda, monótona decreciente.*

2.ª *Todo término de la primera es menor que cualquiera de la segunda.*

3.ª *La diferencia entre dos términos correspondientes de ambas, desde cierto orden en adelante, es menor que cualquier número dado, por pequeño que se considere.*

(*) En las sucesiones monótonas, la diferencia entre dos términos consecutivos puede ser menor que cualquier número que se considere, pudiendo ser algunas de esas diferencias iguales a cero, pero nunca todas.

Es decir, las sucesiones anteriores serán monótonas convergentes si $a_n < a'_n$ y, además, si $a'_n - a_n < \varepsilon$, siendo ε un número tan pequeño como se quiera.

10. Definición de número real por dos sucesiones monótonas convergentes. — El concepto de sucesiones monótonas convergentes nos da otro procedimiento para definir un número real.

EJEMPLOS:

1) Sea el número entero 7. Podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} 6 < 6'9 < 6'99 < 6'999 < 6'9999 < \ldots \\ 8 > 7'1 > 7'01 > 7'001 > 7'0001 > \ldots \end{array}\right\} 7$$

De estas dos sucesiones decimos que *definen* al número 7, o también, que el número 7 es el *elemento de separación* de ambas.

2) Sea ahora la fracción decimal exacta 1'25 = 1'2500... Tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} 1 < 1'2 < 1'25 = 1'250 = 1'2500 = \ldots \\ 2 > 1'3 > 1'26 > 1'251 > 1'2501 > \ldots \end{array}\right\} 1'25$$

3) Consideremos una fracción periódica pura, como $\frac{7}{11} = 0'6363\ldots$ Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < 0'6 < 0'63 < 0'636 < 0'6363 < \ldots \\ 1 > 0'7 > 0'64 > 0'637 > 0'6364 > \ldots \end{array}\right\} \frac{7}{11}$$

y una periódica mixta, como $\frac{17}{12} = 1'41666\ldots$ Podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} 1 < 1'4 < 1'41 < 1'416 < 1'4166 < \ldots \\ 2 > 1'5 > 1'42 > 1'417 > 1'4167 > \ldots \end{array}\right\} \frac{17}{12}$$

4) Definamos también dos números irracionales:

uno positivo, $\sqrt{3} = 1'73205\ldots$, y otro negativo, $-\pi = -3'141592\ldots$

Tendremos, sucesivamente:

$$\left.\begin{array}{l} 1 < 1'7 < 1'73 < 1'732 = 1'7320 < 1'73205 < \ldots \\ 2 > 1'8 > 1'74 > 1'733 > 1'7321 > 1'73206 > \ldots \end{array}\right\} \sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4 < -3'2 < -3'15 < -3'142 < -3'1416 < \ldots \\ -3 > -3'1 > -3'14 > -3'141 > -3'1415 > \ldots \end{array}\right\} -\pi$$

En general, podemos decir: *Dos sucesiones monótonas convergentes definen un número real, que es el elemento de separación de las mismas.*

Si llamamos α al elemento de separación entre las sucesiones monótonas convergentes a_n y a'_n, se comprende que todo término de a_n es menor que α, o sea, es un valor por defecto de α; y todo elemento de a' es mayor que α, o sea, es un valor por exceso de α.

Para indicar que el número α está definido por dos sucesiones cuyos términos generales son a_n y a'_n se escribe

$$\alpha = (a_n;\ a'_n)$$

11. Valores aproximados de un número real: errores absoluto y relativo. — Naturalmente, no es posible en el cálculo tomar los números irracionales con sus infinitas cifras decimales. Para operar con ellos, se limita el número de cifras decimales tomando un orden de ellas más o menos avanzado, según la aproximación que sea necesaria en la solución del problema práctico.

En general, para todo número real podemos tomar valores decimales con cuanta aproximación se desee, menores que él (por defecto) o mayores que él (por exceso). Dichos valores serán los términos de las sucesiones que lo definen.

DEFINICIÓN. — *Error absoluto de un número aproximado es la diferencia entre el valor exacto del número y el aproximado.*

Designando por E el error absoluto, por N el valor exacto del número y por A el valor aproximado, tendremos:

$$E = N - A$$

Si $N - A > 0$, el error absoluto es *por defecto;* y si $N - A < 0$, el error absoluto es *por exceso.*

EJEMPLO. — Cuando tomamos 3'14 como valor de π, el error absoluto es $\pi - 3'14$, por defecto; y si el valor tomado es 3'1416, el error absoluto será $\pi - 3'1416$, por exceso.

En la práctica no interesa conocer el error absoluto propiamente dicho; se consideran únicamente *cotas de error,* o sea, números positivos

sencillos a los que dichos errores se consideran inferiores en valor absoluto.

Así, en el ejemplo anterior bastará saber que el error absoluto es menor que 0'01 para 3'14, o que es menor que 0'0001 al tomar 3'1416. Los números 0'01 y 0'0001 se denominan cotas o límites del error absoluto.

Los valores aproximados no solamente se emplean en la expresión de medidas cuando el número exacto es un número irracional, sino también cuando se trata de números racionales. Por ejemplo, cuando decimos que el resultado de una medición es 6'34 m. por defecto, queremos indicar que 6'34 m. es la distancia medida con error menor que un centímetro.

El error absoluto no da siempre una idea clara de la aproximación con que ha sido obtenida una medida o el resultado final de un cálculo; es necesario muchas veces conocer el error cometido en una unidad, para lo cual se divide el error absoluto por el valor exacto del número. A este cociente se le llama error relativo.

DEFINICIÓN. — *Error relativo de un número aproximado es el cociente del error absoluto por el número exacto.*

Designando por E' el error relativo, tendremos:

$$E' = \frac{E}{N}$$

Ahora bien: como no conocemos ninguno de los dos términos del cociente, lo que haremos es sustituir el error absoluto E por una cota del mismo, y el número exacto N por un valor aproximado por defecto; resultará así un cociente mayor que E', o sea, una *cota del error relativo,* que es la que se utiliza en la práctica. Puede calcularse aplicando la siguiente

REGLA. — *Para hallar una cota del error relativo de un número aproximado, se divide la cota del error absoluto por el número que resulta al sustituir por ceros todas las cifras que siguen a la primera significativa en el número considerado.*

EJEMPLO. — El valor 3'14 de π nos da la siguiente cota de error relativo

$$\frac{0'01}{3'00} = \frac{1}{300}, \text{ y el valor } 3'1416, \frac{0'0001}{3'0000} = \frac{1}{30.000}$$

12. Representación geométrica de los números reales: postulado de continuidad. — Consideremos una recta $X'X$ (fig. 2) y señalemos un punto O, al que denominamos *origen*. Desde tercer curso sabemos que para representar geométricamente los números racionales, se toma un segmen-

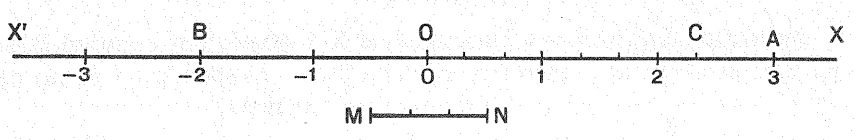

FIG. 2

to arbitrario MN como unidad y se llevan en uno y otro sentido segmentos iguales a MN, obteniendo así los puntos correspondientes a los números enteros 1, 2, 3, ...; −1, −2, −3, ... Dado cualquier número entero, para hallar el punto que le representa se lleva a partir de O y en el sentido correspondiente, según sea positivo o negativo, tantos segmentos iguales a MN como unidades tenga el número. De este modo, a cada número entero corresponde un punto en la recta. Por ejemplo, a +3 le corresponde el punto A, y a −2, el punto B.

Para representar un número fraccionario, se divide la unidad elegida MN en tantas partes iguales como exprese el denominador, y luego se llevan a la derecha de O si el número es positivo, o a la izquierda si es negativo, tantas veces una de esas partes como indique el numerador. Si se trata, por ejemplo, del número 7/3, dividiremos a MN en 3 partes iguales y llevaremos 7 veces una de ellas a la derecha de O, con lo que obtendremos el punto C.

Procediendo del modo indicado se llega a la conclusión de que a todo número racional corresponde un punto en la recta. El número que corresponde a un punto de la recta se llama *abscisa* de ese punto. Si x es la abscisa del punto P, lo escribiremos así: $P(x)$.

Supongamos ahora un número *irracional*. Sea, por ejemplo, $\sqrt{2}$. Si en el punto de abscisa 1 trazamos una perpendicular a la recta $X'X$ (fig. 3)

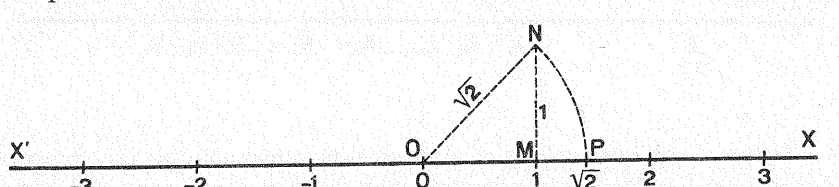

FIG. 3

y sobre ella tomamos el segmento $MN = 1$, en virtud del teorema de Pitágoras se verifica

$$\overline{ON}^2 = 1^2 + 1^2 \quad \text{de donde} \quad ON = \sqrt{2}$$

Llevando ahora $ON = \sqrt{2}$ sobre el eje $X'X$ obtenemos el punto P, lo que nos dice que al número irracional $\sqrt{2}$ le corresponde un punto en la recta.

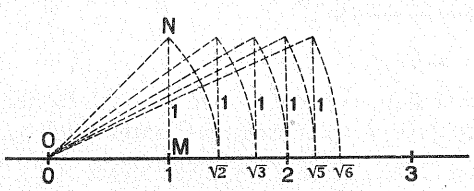

FIG. 4

De manera análoga obtendríamos los puntos cuyas abscisas son $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ... (fig. 4).

Por este u otros procedimientos podríamos seguir obteniendo más puntos representativos de números irracionales, y llegaríamos a la conclusión de que a todo número irracional le corresponde un punto en la recta.

En general, si suponemos un número real definido por las sucesiones

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ \ldots \ \leqq a_n \leqq \ \ldots \\ a'_1 \geqq a'_2 \geqq a'_3 \geqq \ \ldots \ \geqq a'_n \geqq \ \ldots \end{array}\right\}$$

y sobre una recta (fig. 5), a partir del punto O, llevamos los segmentos OA_1, OA_2, OA_3, ... OA_n ..., cuyas medidas sean, respectivamente, a_1, a_2, a_3, ... a_n ... y, luego, los segmentos OB_1, OB_2, OB_3, ... OB_n ..., cuyas medidas respectivas sean a'_1, a'_2, a'_3, ... a'_n ..., obtendremos dos sucesiones indefinidas de puntos: A_1, A_2, A_3, ... A_n ..., ordenados de izquierda a derecha, y B_1, B_2, B_3, ... B_n ..., ordenados de derecha a izquierda, tales que el segmento A_nB_n puede llegar a ser tan pequeño como se quiera.

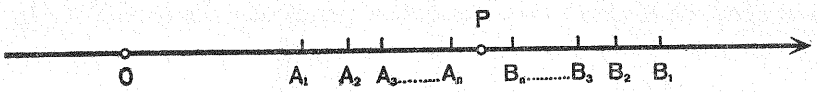

FIG. 5

Como el número real es el elemento de separación de las dos sucesiones que lo definen, la intuición nos dice que habrá en la recta un punto P de separación entre los puntos A_n y B_n, es decir, existirá una longitud

mayor que todas las a y menor que todas las b. Esto es lo que se expresa en el siguiente

POSTULADO DE CONTINUIDAD. — *Si en una recta, a partir de un punto y hacia el mismo lado, tomamos dos sistemas de segmentos*

$$\left.\begin{array}{l} OA_1 < OA_2 < OA_3 < \ldots < OA_n < \ldots \\ OB_1 > OB_2 > OB_3 > \ldots > OB_n > \ldots \end{array}\right\} OP$$

tales que los del primer sistema sean menores que los del segundo, si existen segmentos de uno y otro sistema cuya diferencia sea tan pequeña como se quiera, hay un segmento OP, *y uno sólo, mayor que todos los del primer sistema y menor que todos los del segundo.*

En resumen: *A todo número real corresponde un punto de la recta y, recíprocamente, a cada punto de la recta corresponde un número real, que se denomina abscisa del punto.*

EJERCICIOS

11. Convertir en decimales las siguientes fracciones: $\frac{31}{8}$; $\frac{13}{50}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{19}{6}$; $\frac{77}{52}$.

12. Hallar las fracciones generatrices de: 0'00256; 0'(18); 1'08(3); 0'(307692); 0'2(142857).

13. Decir si son racionales o irracionales los números siguientes: 0'025; 0'000999...; 100'1; 2'449490...; 3'006000600006...; 7'50505050...

14. Probar que no existe ningún número racional que sea igual a $\sqrt{12}$.

15. Explicar si es racional o irracional la medida de la altura de un triángulo equilátero, cuando se toma por unidad el lado de dicho triángulo.

16. El número $\frac{7}{8}$, ¿es racional? ¿Es real?

17. Clasificar, dentro de los números reales, los números siguientes: 6'76(63); $\sqrt{0'4}$; 9'55; 122; $\sqrt{28}$; $\frac{0'3(6)}{2'71}$; $\sqrt{2.116}$; $\sqrt{0'1}$; $\sqrt{\frac{507}{75}}$; $\sqrt{0'(4)}$

18. Representar los números del ejercicio anterior en forma decimal con infinitas cifras.

19. Deducir razonadamente si la sucesión de término general $\frac{3n+5}{1-4n}$ es creciente o decreciente.

20. Escribir el término que ocupa el lugar n en las siguientes sucesiones:

a) $\frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \frac{6}{27}; \frac{8}{81}; \ldots$ *b)* $\frac{3}{2}; \frac{5}{4}; \frac{7}{6}; \frac{9}{8}; \ldots$

c) $\frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{9}{10}; \frac{25}{26}; \ldots$

21. Deducir razonadamente si son monótonas convergentes las sucesiones

4; 4'3; 4'33; 4'333; 4'3333; ...
6; 5'5; 5'46; 5'446; 5'4446; ...

22. Dos sucesiones monótonas convergentes definen un solo número real. ¿El recíproco de esta proposición es cierto? Razonarlo con un ejemplo.

23. Escribir pares de sucesiones monótonas convergentes que definan a los números siguientes: 11, 3'42; $\frac{15}{8}$; 0'(57); $\frac{7}{6}$; $\sqrt{13}$; $e = 2'7182...$

24. Determinar las cotas de los errores absolutos de los siguientes valores aproximados: $\sqrt{2} = 1'41$; $e = 2'7182$; $\sqrt{11} = 3'317$; $\sqrt[3]{51} = 3'7$.

25. Calcular con dos cifras decimales exactas las siguientes raíces:

$$\sqrt{19}; \quad \sqrt{42}; \quad \sqrt{8'5}; \quad \sqrt{0'14}; \quad \sqrt{2'73};$$

y determinar las cotas de los errores relativos de los valores aproximados obtenidos.

26. Explicar cómo se construirá, con regla y compás, $\sqrt{7}$. Hágase la figura tomando por unidad el centímetro.

3. Calculatoria de los números reales

13. Igualdad y desigualdad de números reales. — *Dos números reales* $\alpha = (a_n;\ a'_n)$ *y* $\beta = (b_n;\ b'_n)$ *son iguales, si todo término de la primera sucesión de* α *es menor que cualquier término de la segunda sucesión de* β, *y todo término de la primera sucesión de* β *es menor que todo término de la segunda sucesión de* α.

Fácilmente se ve (fig. 6) que los dos pares de sucesiones definen el mismo punto de la recta. Además, la definición verifica las propiedades fundamentales de la igualdad, a saber:

1) *Propiedad idéntica:* $\alpha \equiv \alpha$.
2) *Propiedad transitiva:* si $\alpha = \beta$ y $\beta = \gamma$ es $\alpha = \gamma$.
3) *Propiedad recíproca:* si $\alpha = \beta$ es $\beta = \alpha$.

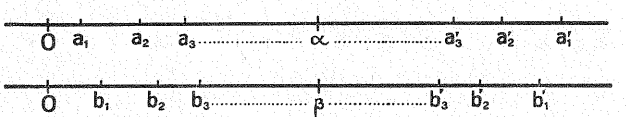

FIG. 6

EJEMPLO. — Los dos pares de sucesiones:

$$\begin{cases} 3 < 3'1 < 3'14 < 3'141 < \dots \\ 4 > 3'2 > 3'15 > 3'142 > \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 < 3'1 < 3'14 < 3'141 < \dots \\ 5 > 3'3 > 3'16 > 3'143 > \dots \end{cases}$$

definen al mismo número $\pi = 3'1415\dots$

Se dice que un número racional r *es menor que un número real* $\alpha = (a_n;\ a'_n)$, *si* r *es menor que algún término de la sucesión* a_n *de* α.

Por el contrario, *diremos que un número racional* r *es mayor que un número real* $\alpha = (a_n;\ a'_n)$, *si* r *es mayor que algún término de la sucesión* a'_n *de* α.

La interpretación geométrica se ve claramente en la figura 7.

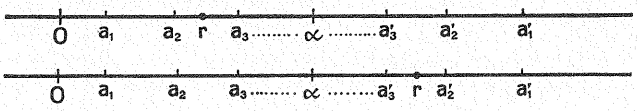

FIG. 7

EJEMPLO. — Por ser

$$\pi = \begin{cases} 3 < 3'1 < 3'14 < 3'141 < \dots \\ 4 > 3'2 > 3'15 > 3'142 > \dots \end{cases}$$

se tiene $3'13 < \pi$, pues es $3'13 < 3'14$, que es un número de la primera sucesión. En cambio, $3'17 > \pi$, pues $3'17 > 3'15$, que es un número de la segunda sucesión.

En particular, si $r = 0$, tendremos:

Un número real es positivo si existe algún término positivo en la primera de las sucesiones con que está definido.

Un número real es negativo si existe algún término negativo en la segunda de las sucesiones con que está definido.

La interpretación geométrica es muy sencilla (fig. 8):

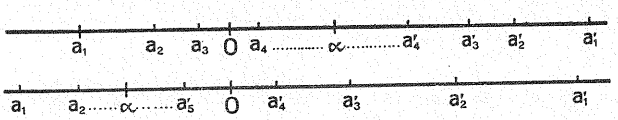

FIG. 8

EJEMPLOS. — El número definido por las sucesiones

$$\begin{aligned} -2 < -1 < 0 < 1 \quad &< 1'3 < 1'36 < 1'366 < \dots \\ 3 > 2 > 1'5 > 1'4 > 1'37 > 1'367 > &\dots \end{aligned}$$

es positivo, ya que existe un término positivo en la primera sucesión, por ejemplo, 1'3. Por el contrario, el número definido por las sucesiones

$$\begin{aligned} -2 < -1'7 < -1'64 < -1'635 < &\dots \\ 2 > 1 > -1 > -1'6 > -1'63 > -1'634 > &\dots \end{aligned}$$

es negativo, pues existe un término negativo en la segunda sucesión, por ejemplo $-1'63$.

Dados dos números reales α *y* β, *se dice que es* $\alpha < \beta$, *si existe un número racional* r *que sea mayor que* α *y menor que* β, *es decir, si* $\alpha < r < \beta$.

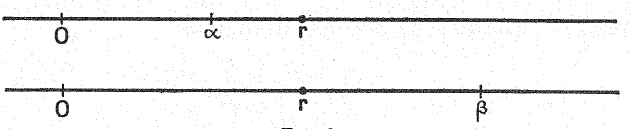

FIG. 9

La interpretación gráfica aparece en la figura 9.

Se puede demostrar que la anterior definición verifica las propiedades fundamentales de las desigualdades; de ellas, la más importante es la *propiedad transitiva,* que dice:

$$\text{si} \quad \alpha < \beta \quad \text{y} \quad \beta < \gamma \quad \text{es} \quad \alpha < \gamma$$

EJEMPLO. — Dados los números reales

$$\alpha = \begin{cases} 4 < 4'7 < 4'72 = 4'720 < 4'7203 < \ldots \\ 5 > 4'8 > 4'73 > 4'721 > 4'7204 > \ldots \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} 4 < 4'7 < 4'76 < 4'763 < \ldots \\ 5 > 4'8 > 4'77 > 4'764 > \ldots \end{cases}$$

por ser $4'73 > 4'721$, se deduce que $4'73 > \alpha$; y por verificarse $4'73 < 4'76$, resulta que $4'73 < \beta$. Luego, $\alpha < 4'73 < \beta$, es decir, $\alpha < \beta$.

14. Operaciones con números reales. — Damos a continuación las definiciones de las operaciones fundamentales con números reales. Para que estas definiciones sean válidas, deberán:

1.° Comprender como caso particular a las dadas para números racionales, cuando los datos sean racionales.

2.° Verificar las mismas *leyes formales* establecidas en el campo racional.

La demostración de estas condiciones requiere en muchos casos prolijas consideraciones, por lo que, teniendo además en cuenta su interés exclusivamente teórico, serán omitidas en su totalidad.

15. Suma de números reales. — *Suma de números reales es otro número real definido por dos sucesiones monótonas convergentes cuyos términos son la suma de los términos correspondientes de las sucesiones que definen a los sumandos.*

Así, si tenemos los números reales α y β definidos por las sucesiones

$$\alpha = (a_n;\ a'_n) = \begin{cases} a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \\ a'_1 \geqq a'_2 \geqq a'_3 \geqq \ldots \geqq a'_n \geqq \ldots \end{cases}$$

$$\beta = (b_n;\ b'_n) = \begin{cases} b_1 \leqq b_2 \leqq b_3 \leqq \ldots \leqq b_n \leqq \ldots \\ b'_1 \geqq b'_2 \geqq b'_3 \geqq \ldots \geqq b'_n \geqq \ldots \end{cases}$$

su suma vendrá determinada por las sucesiones

$$\alpha + \beta = (a_n + b_n;\ a'_n + b'_n) = \begin{cases} a_1 + b_1 \leqq a_2 + b_2 \leqq \ \dots\ \leqq a_n + b_n \leqq \ \dots \\ a'_1 + b'_1 \geqq a'_2 + b'_2 \geqq \ \dots\ \geqq a'_n + b'_n \geqq \ \dots \end{cases}$$

cuya monotonía y convergencia es fácil de probar.

Se demuestra que la suma de números reales posee las mismas propiedades que la suma de los números racionales, a saber: *uniforme, conmutativa* y *asociativa.*

EJEMPLO 1.º — La suma $\pi + \sqrt{3}$ viene definida por las sucesiones

$$\begin{cases} (3+1) < (3'1+1'7) < (3'14+1'73) < (3'141+1'732) < (3'1415+1'7320) < \dots \\ (4+2) > (3'2+1'8) > (3'15+1'74) > (3'142+1'733) > (3'1416+1'7321) > \dots \end{cases}$$

o sea

$$\pi + \sqrt{3} = \begin{cases} 4 < 4'8 < 4'87 < 4'873 < 4'8735 < \dots \\ 6 > 5 \ \ > 4'89 > 4'875 > 4'8737 > \dots \end{cases}$$

EJEMPLO 2.º — Dados los números

$$\alpha = \begin{cases} 1 < 1'2 < 1'22 < 1'222 < \dots \\ 2 > 1'3 > 1'23 > 1'223 > \dots \end{cases} \frac{11}{9} \qquad \beta = \begin{cases} 3 < 3'7 < 3'77 < 3'777 < \dots \\ 4 > 3'8 > 3'78 > 3'778 > \dots \end{cases} \frac{34}{9}$$

su suma viene representada por las sucesiones

$$\alpha + \beta = \begin{cases} 4 < 4'9 < 4'99 < 4'999 < \dots \\ 6 > 5'1 > 5'01 > 5'001 > \dots \end{cases} = 5$$

16. Números reales opuestos. — Dado un número real $\alpha = (a_n;\ a'_n)$, si cambiamos el signo de los términos de las sucesiones que lo definen y tomamos la segunda por primera y viceversa, obtendremos las sucesiones $(a'_n;\ a_n)$, las cuales, por ser monótonas y convergentes, definen un número real. A este número lo representamos por $-\alpha$, y de él decimos que es el *opuesto* de α.

EJEMPLO. — El opuesto del número

$$\sqrt{2} = \begin{cases} 1 < 1'4 < 1'41 < 1'414 < 1'4142 < \dots \\ 2 > 1'5 > 1'42 > 1'415 > 1'4143 > \dots \end{cases}$$

será

$$-\sqrt{2} = \begin{cases} -2 < -1'5 < -1'42 < -1'415 < -1'4143 < \dots \\ -1 > -1'4 > -1'41 > -1'414 > -1'4142 > \dots \end{cases}$$

La suma de dos números reales opuestos es cero.

En efecto: al sumar un número con su opuesto se obtienen dos sucesiones monótonas convergentes, la primera de las cuales tiene sólo términos negativos, mientras que los de la segunda son todos positivos; es decir, dichas sucesiones definen al número 0.

Así, para el ejemplo anterior, tendremos:

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = \left\{ \begin{array}{l} -1 < -0'1 < -0'01 < -0'001 < -0'0001 < \ldots \\ +1 > +0'1 > +0'01 > +0'001 > +0'0001 > \ldots \end{array} \right\} = 0$$

17. Sustracción de números reales. — *Diferencia de dos números reales es otro número real que sumado con el sustraendo nos da el minuendo.*

Para restar dos números reales se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Así, si suponemos los números α y β definidos por las sucesiones

$$\alpha = (a_n;\ a'_n) = \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \\ a'_1 \geqq a'_2 \geqq a'_3 \geqq \ldots \geqq a'_n \geqq \ldots \end{array} \right.$$

$$\beta = (b_n;\ b'_n) = \left\{ \begin{array}{l} b_1 \leqq b_2 \leqq b_3 \leqq \ldots \leqq b_n \leqq \ldots \\ b'_1 \geqq b'_2 \geqq b'_3 \geqq \ldots \geqq b'_n \geqq \ldots \end{array} \right.$$

la diferencia $\alpha - \beta$ vendrá definida por las sucesiones

$$\alpha - \beta = (a_n - b'_n;\quad a'_n - b_n) = \left\{ \begin{array}{l} a_1 - b'_1 \leqq a_2 - b'_2 \leqq \ldots \leqq a_n - b'_n \leqq \ldots \\ a'_1 - b_1 \geqq a'_2 - b_2 \geqq \ldots \geqq a'_n - b_n \geqq \ldots \end{array} \right.$$

cuya convergencia y monotonía es fácil probar.

EJEMPLO. — Dados los números

$$\sqrt{7} = \left\{ \begin{array}{l} 2 < 2'6 < 2'64 < 2'645 < 2'6457 < \ldots \\ 3 > 2'7 > 2'65 > 2'646 > 2'6458 > \ldots \end{array} \right.$$

$$\sqrt{5} = \left\{ \begin{array}{l} 2 < 2'2 < 2'23 < 2'236 = 2'2360 < \ldots \\ 3 > 2'3 > 2'24 > 2'237 > 2'2361 > \ldots \end{array} \right.$$

la diferencia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ estará definida por las sucesiones

$$\left\{ \begin{array}{l} (2-3) < (2'6-2'3) < (2'64-2'24) < (2'645-2'237) < (2'6457-2'2361) < \ldots \\ (3-2) > (2'7-2'2) > (2'65-2'23) > (2'646-2'236) > (2'6458-2'2360) > \ldots \end{array} \right.$$

es decir:

$$\sqrt{7} - \sqrt{5} = \begin{cases} -1 < 0'3 < 0'40 < 0'408 < 0'4096 < \ldots \\ 1 > 0'5 > 0'42 > 0'410 > 0'4098 > \ldots \end{cases}$$

18. Módulo o valor absoluto de un número real. — El *módulo* o *valor absoluto* de un número real α se representa por $|\alpha|$ y se define del modo siguiente: *Si α es positivo, su valor absoluto es el mismo número; si α es negativo, su valor absoluto es $-\alpha$.* Es decir:

$$\text{si } \alpha > 0, \text{ definimos } |\alpha| = \alpha$$
$$\text{si } \alpha < 0, \text{ definimos } |\alpha| = -\alpha$$

EJEMPLO. — El valor absoluto de

$$-\sqrt{2} = \begin{cases} -2 < -1'5 < -1'42 < \ldots \\ -1 > -1'4 > -1'41 > \ldots \end{cases} \qquad \text{es} \qquad \sqrt{2} = \begin{cases} 1 < 1'4 < 1'41 < \ldots \\ 2 > 1'5 > 1'42 > \ldots \end{cases}$$

19. Multiplicación de números reales. — Si los números reales $\alpha = (a_n;\ a'_n)$ y $\beta = (b_n;\ b'_n)$ son positivos, podemos siempre definirlos por pares de sucesiones monótonas convergentes de términos únicamente positivos. Bastará para ello que tomemos a_1 y b_1 mayores que cero.

Producto de dos números reales positivos $\alpha = (a_n;\ a'_n)$ y $\beta = (b_n;\ b'_n)$ es el número real definido por el par de sucesiones

$$\alpha \cdot \beta = (a_n \cdot b_n;\ a'_n \cdot b'_n) = \begin{cases} a_1 \cdot b_1 \leqq a_2 \cdot b_2 \leqq \ \ldots \ \leqq a_n \cdot b_n \leqq \ \ldots \\ a'_1 \cdot b'_1 \geqq a'_2 \cdot b'_2 \geqq \ \ldots \ \geqq a'_n \cdot b'_n \geqq \ \ldots \end{cases}$$

La definición de producto se extiende al caso de dos números reales cualesquiera, positivos o negativos, del modo siguiente:

Si los factores α y β son números reales positivos o negativos, de acuerdo con la definición anterior se hallará el producto de sus valores absolutos; se tomará este resultado, si los factores son ambos positivos o negativos, y su opuesto si uno de los factores es positivo y el otro negativo.

El producto de *varios factores* se obtiene hallando el producto de los dos primeros, multiplicando después este resultado por el tercero, y así sucesivamente hasta llegar al último factor.

Se demuestra que el producto de números reales verifica las mismas *leyes formales* que el producto de números racionales, a saber: *uniforme, conmutativa, asociativa* y *distributiva.*

EJEMPLO. — El producto de los números irracionales

$$\sqrt{2} = \begin{cases} 1 < 1'4 < 1'41 < 1'414 < 1'4142 < \ldots \\ 2 > 1'5 > 1'42 > 1'415 > 1'4143 > \ldots \end{cases}$$

$$\sqrt{18} = \begin{cases} 4 > 4'2 < 4'24 < 4'242 < 4'2426 < \ldots \\ 5 > 4'3 < 4'25 > 4'243 > 4'2427 > \ldots \end{cases}$$

está definido por el siguiente par de sucesiones:

$$\begin{cases} 1 \cdot 4 < 1'4 \cdot 4'2 < 1'41 \cdot 4'24 < 1'414 \cdot 4'242 < 1'4142 \cdot 4'2426 < \ldots \\ 2 \cdot 5 > 1'5 \cdot 4'3 > 1'42 \cdot 4'25 > 1'415 \cdot 4'243 > 1'4143 \cdot 4'2427 > \ldots \end{cases}$$

es decir:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \left\{ \begin{matrix} 4 < 5'88 < 5'9784 < 5'998188 < 5'99988492 < \ldots \\ 10 > 6'45 > 6'0350 > 6'003845 > 6'00045061 > \ldots \end{matrix} \right\} = 6$$

20. Números reales recíprocos. — Dado un número real $\alpha = (a_n; a'_n)$, si escribimos el recíproco de los términos de las sucesiones que lo definen y de las sucesiones que resultan tomamos la segunda por primera y viceversa, obtendremos las sucesiones $\left(\frac{1}{a'_n}; \frac{1}{a_n}\right)$, las cuales, por ser monótonas convergentes, definen un número real. A este número lo representamos por $\frac{1}{\alpha}$, y decimos de él que es el recíproco de α.

EJEMPLO. — El recíproco del número

$$\sqrt{3} = \begin{cases} 1 < 1'7 < 1'73 < 1'732 < \ldots \\ 2 > 1'8 > 1'74 > 1'733 > \ldots \end{cases}$$

será

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{1}{1'8} < \frac{1}{1'74} < \frac{1}{1'733} < \ldots \\ 1 > \frac{1}{1'7} > \frac{1}{1'73} > \frac{1}{1'732} > \ldots \end{cases}$$

El producto de dos números reales recíprocos es igual a la unidad.

En efecto: al multiplicar un número por su recíproco se obtienen dos sucesiones monótonas convergentes, la primera de las cuales tiene todos sus términos menores que 1, mientras que los de la segunda son mayores que 1; es decir, dichas sucesiones definen al número 1.

21. División de números reales. — *Cociente de dos números reales positivos es otro número real que multiplicado por el divisor nos da el dividendo.*

Para dividir dos números reales positivos se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor.

Sean los números reales positivos α y β. Si designamos por δ al cociente, tendremos:

$$\delta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Este número viene definido por las sucesiones

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{a_n}{b'_n}; \quad \frac{b_n}{a'_n} \right)$$

Si los números α y β son números cualesquiera, positivos o negativos, de acuerdo con la regla anterior se hallará el cociente de sus valores absolutos; se tomará este resultado, si los números son ambos positivos o negativos, y su opuesto si uno de los números es positivo y el otro negativo.

EJEMPLO. — El cociente $\sqrt{18} : \sqrt{2}$ está definido por las sucesiones

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 4 \cdot \frac{1}{2} < 4'2 \cdot \frac{1}{1'5} < 4'24 \cdot \frac{1}{1'42} < 4'242 \cdot \frac{1}{1'415} < \dots \\ 5 \cdot 1 > 4'3 \cdot \frac{1}{1'4} > 4'25 \cdot \frac{1}{1'41} > 4'243 \cdot \frac{1}{1'414} > \dots \end{cases}$$

o sea:

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \begin{Bmatrix} 2 < 2'8 & < 2'98\dots & < 2'997\dots \\ 5 > 3'07\dots & > 3'014\dots & > 3'0007\dots \end{Bmatrix} = 3$$

22. Potencia de exponente natural de un número real. — Como en el campo de los números racionales, *definimos la potencia de exponente natural* m *de un número real* α *como el producto de* m *factores iguales a* α. Así:

$$\alpha^m = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots\dots \cdot \alpha}_{m}$$

con los convenios siguientes: $\alpha^1 = \alpha$; $\alpha^0 = 1$.

Si el número α está definido por las sucesiones

$$\alpha = \begin{cases} a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \\ a'_1 \geqq a'_2 \geqq a'_3 \geqq \ldots \geqq a'_n \geqq \ldots \end{cases}$$

la potencia α^m lo estará por las sucesiones

$$\alpha^m = \begin{cases} a_1 a_1 a_1 \ldots \leqq a_2 a_2 a_2 \ldots \leqq a_3 a_3 a_3 \ldots \leqq \ldots \leqq a_n a_n a_n \ldots \leqq \ldots \\ a'_1 a'_1 a'_1 \ldots \geqq a'_2 a'_2 a'_2 \ldots \geqq a'_3 a'_3 a'_3 \ldots \geqq \ldots \geqq a'_n a'_n a'_n \ldots \leqq \ldots \end{cases}$$

o sea

$$\alpha^m = \begin{cases} a_1^m \leqq a_2^m \leqq a_3^m \leqq \ldots \leqq a_n^m \leqq \ldots \\ a_1'^m \geqq a_2'^m \geqq a_3'^m \geqq \ldots \geqq a_n'^m \geqq \ldots \end{cases}$$

que son también monótonas convergentes.

23. Raíz de índice natural de un número real. — *Se llama raíz de índice natural de un número real a otro número real que elevado a la potencia que indica el índice nos da el número dado.*

Es decir, si tenemos un número real α, su raíz emésima es otro número real β, tal que se verifique $\alpha = \beta^m$.

Para indicar que β es la raíz emésima de α escribimos

$$\sqrt[m]{\alpha} = \beta$$

Se demuestra que *existe la raíz de cualquier índice de todo número real positivo, la cual tiene dos valores opuestos si el índice es par y uno solo cuando es impar. Para los números reales negativos, únicamente existen las raíces de índice impar, que son negativas.*

En la práctica, para el cálculo de la raíz cuadrada, lo más sencillo es determinarla con la aproximación que se necesite a partir de la expresión decimal del número real, y luego se escriben las sucesiones que la definen.

EJEMPLO. — Para hallar la raíz cuadrada de π, procederemos así:

$\sqrt{3'14159\ldots}$	$1'772\ldots$
214	27×7
2515	347×7
8692	3542×2
$1608\ldots$	

$$\sqrt{\pi} = \begin{cases} 1 < 1'7 < 1'77 < 1'772 < \ldots \\ 2 > 1'8 > 1'78 > 1'773 > \ldots \end{cases}$$

EJERCICIOS

Dados los números reales

$$\alpha = \sqrt{7} = \begin{cases} 2 < 2'6 < 2'64 < 2'645 < 2'6457 < \dots \\ 3 > 2'7 > 2'65 > 2'646 > 2'6458 < \dots \end{cases}$$

$$\beta = \frac{1}{\pi} = \begin{cases} 0 < 0'3 < 0'31 < 0'318 < 0'3183 < \dots \\ 1 > 0'4 > 0'32 > 0'319 > 0'3184 > \dots \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1 < 1'5 < 1'57 = 1'570 < 1'5707 < \dots \\ 2 > 1'6 > 1'58 > 1'571 > 1'5708 > \dots \end{cases}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = \begin{cases} 0 < 0'5 < 0'56 < 0'564 < 0'5641 < \dots \\ 1 > 0'6 > 0'57 > 0'565 > 0'5642 > \dots \end{cases}$$

27. Escribir otro par de sucesiones que definan: a α; a β; a γ; a δ.

28. Comparar: $\frac{262}{99}$ con α; $\sqrt{2'4649}$ con γ; $\frac{17}{30}$ con δ.

29. Colocar en orden creciente α, β, γ y δ.

30. Hallar: $\alpha + \delta$; $\beta + \gamma$; $\frac{3}{4} + \beta$; $\gamma + \sqrt{2}$.

31. Hallar: $-\beta$; $-\gamma$; $\alpha - \beta$; $\delta - \gamma$; $\gamma - \frac{1}{3}$.

32. Hallar: $\alpha \cdot \beta$; $\beta \cdot \gamma$; $\gamma \cdot \delta$; $\frac{7}{8} \cdot \alpha$.

33. Hallar: $\frac{1}{\gamma}$; $\frac{1}{\delta}$; $\frac{\alpha}{\gamma}$; $\frac{\gamma}{\delta}$; $\frac{5}{\alpha}$

34. Hallar: α^2; δ^2; $\sqrt{\beta}$. (Tómese $\frac{1}{\pi} = 0'31830988\dots$)

4. Nociones sobre límites

24. Límite finito. — *Se dice que la sucesión indefinida de números reales*

$$a_1;\quad a_2;\quad a_3;\quad a_4;\quad \ldots\ a_n;\quad \ldots$$

tiene por límite el número real a, *o que tiende al límite finito* a, *cuando, siendo* n *lo suficientemente avanzado, la diferencia* $(a_n - a)$ *entre el término general y el límite* a *es en valor absoluto menor que cualquier número positivo* ε *por pequeño que éste sea.*

Esto es, cuando se verifique

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{o lo que es igual} \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

El límite se indica simbólicamente así:

$$\lim a_n = a \quad \text{o también} \quad a_n \longrightarrow a$$

expresiones que se leen, respectivamente: «límite de a_n igual a a» y «a_n tiende a a».

Interpretada geométricamente la definición de límite finito es como sigue (fig. 10): existe un punto de abscisa a tal que, fijado un segmento de longitud 2ε simétrico respecto de a, llamado *entorno*, los puntos de la sucesión, desde un lugar en adelante, quedan contenidos en dicho segmento.

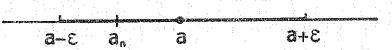

FIG. 10

EJEMPLO. — La sucesión

$$\frac{3}{1};\ \frac{5}{2};\ \frac{7}{3};\ \frac{9}{4};\ \frac{11}{5};\ \ldots;\ \frac{2n+1}{n};\ \ldots$$

tiene por límite 2, pues $\frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{2n+1-2n}{n} = \frac{1}{n}$

y para n suficientemente grande resulta $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Si la sucesión es tal que

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = \ldots$$

es decir, todos sus términos, o a partir de uno determinado, son iguales a un número, este número es límite de la sucesión.

Expresamos esto, diciendo: *El límite de una constante es ella misma.*

EJEMPLO. — El límite de la sucesión 7; 7'2; 7'25; 7'250; 7'2500; 7'25000; ... es 7'25.

25. Infinitésimo. — *Cuando en una sucesión sus términos decrecen y, a partir de uno, todos los restantes son menores en valor absoluto que cualquier número positivo dado por pequeño que éste sea, su límite es cero y el término general recibe el nombre de infinitésimo.*

EJEMPLO. — La sucesión

$$\frac{1}{10}; \frac{1}{10^2}; \frac{1}{10^3}; \frac{1}{10^4}; \ldots; \frac{1}{10^n}; \ldots$$

tiende a cero, porque se verifica

$$\frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

siempre que n sea suficientemente grande.

Por consiguiente, diremos que $\frac{1}{10^n}$ representa un *infinitésimo,* al crecer n indefinidamente

26. Límite infinito. — *Una sucesión en la que los términos alcanzan valores cada vez mayores y existe un término a partir del cual todos son mayores que cualquier número, por grande que éste sea, no tiene límite,* pero a fin de dar uniformidad al lenguaje, se dice de ella que *tiene por límite infinito* o que *tiende a infinito.*

Se representa simbólicamente de este modo:

$$\lim a_n = +\infty \quad \text{o también} \quad a_n \longrightarrow +\infty$$

EJEMPLO. — La sucesión de los números naturales

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots;\ n;\ \ldots$$

y la de sus cuadrados

$$1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ \ldots;\ n^2;\ \ldots$$

son sucesiones que crecen *sin límite* o que tienen por límite $+\infty$.

Análogamente: *Una sucesión en la que existe un término a partir del cual todos los siguientes son negativos y mayores en valor absoluto que cualquier número por grande que éste sea, se dice de ella que tiene por límite menos infinito o que tiende a menos infinito.*

Se representa escribiendo

$$\lim a_n = -\infty \qquad \text{o también} \qquad a_n \longrightarrow -\infty$$

EJEMPLO. — De la sucesión

$$-1;\ -2;\ -3;\ -4;\ \ldots;\ -n;\ \ldots$$

decimos que tiene por límite $-\infty$, o que tiende a $-\infty$.

27. Clasificación de las sucesiones atendiendo al límite. — Con relación al límite, las sucesiones pueden ser *convergentes, divergentes* u *oscilantes.*

Son convergentes, cuando tienen límite finito; divergentes, cuando el límite es más infinito o menos infinito, y oscilantes, cuando no tienen límite ni finito ni infinito.

EJEMPLOS. — 1. La sucesión $3;\ 3'1;\ 3'14;\ 3'141;\ 3'1415;\ \ldots$

es *convergente,* pues tiende a π.

2. La sucesión $10;\ 10^2;\ 10^3;\ 10^4;\ \ldots;\ 10^n;\ \ldots$

es *divergente,* pues su límite es $+\infty$.

3. La sucesión

$$\frac{0}{1};\ -\frac{3}{2};\ \frac{2}{3};\ -\frac{5}{4};\ \frac{4}{5};\ -\frac{7}{6};\ \ldots$$

es *oscilante,* pues los términos de lugar par se aproximan a -1 y los de lugar impar a $+1$; por consiguiente, no tiene límite, ya que no satisface a las definiciones dadas en (24), (25) y (26).

28. Propiedades de los límites. — I. *Si la sucesión* a_n *tiene por límite el número* a, *a partir de cierto valor de* n *en adelante se conserva* a_n *superior a cualquier número* $k < a$.

En efecto: si $k < a$, según la definición de límite, tiene que ser

$$a - a_n < \varepsilon < a - k \quad \text{o sea} \quad a - a_n < a - k$$

y restando a

$$-a_n < -k \quad \text{de donde} \quad a_n > k$$

La interpretación geométrica se ve claramente en la figura 11.

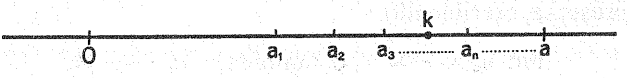

FIG. 11

II. *Si la sucesión* a_n *tiene por límite el número* a, *a partir de cierto valor de* n *en adelante se conserva* a_n *inferior a todo número* $k > a$.

En efecto: si $k > a$, desde cierto valor de n se verifica

$$a_n - a < \varepsilon < k - a \quad \text{o sea} \quad a_n - a < k - a$$

y sumando a

$$a_n < k$$

La interpretación geométrica es sencilla (fig. 12).

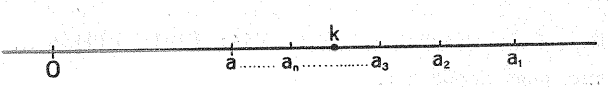

FIG. 12

CONSECUENCIA. — De las dos anteriores se deduce la siguiente propiedad: *A partir de un cierto término, los términos de una sucesión tienen el mismo signo que su límite, supuesto éste distinto de cero.*

Para demostrarlo basta hacer en las propiedades anteriores $k = 0$.

III. *Una sucesión no puede tener más que un límite.*

En efecto: si admitimos que límite $a_n = a$ y límite $a_n = a'$, siendo $a < a'$, por las propiedades anteriores se verificaría que los términos de

la sucesión, a partir de uno determinado en adelante, serán mayores que a y menores que a'.

Si llamamos $a' - a = h$, tendremos:

$$a_n - a < \frac{h}{2}; \qquad a' - a_n < \frac{h}{2}$$

y sumando estas desigualdades resultará

$$a' - a < h$$

contra lo supuesto, puesto que hemos dicho que $a' - a = h$.

Por tanto, a' ha de ser igual a a.

IV. *Si* c_n *es una sucesión comprendida entre otras dos* a_n *y* b_n *que tienen el mismo límite* L, *dicha sucesión tiene también este mismo límite.*

En efecto: si

$$a_n < c_n < b_n \qquad \text{y} \qquad \lim\ a_n = \lim\ b_n = L$$

tendremos que

$$a_n - L < c_n - L < b_n - L$$

y como

$$a_n - L < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad b_n - L < \varepsilon$$

también será

$$c_n - L < \varepsilon \quad \text{luego,} \quad \lim\ c_n = L$$

29. Sucesiones monótonas acotadas. — Decimos que una sucesión monótona creciente está acotada superiormente cuando todos sus términos se mantienen menores que un número fijo k, llamado cota.

Se demuestra que *toda sucesión monótona creciente, acotada superiormente, es convergente y su límite es igual o menor que la cota.*

EJEMPLO. — La sucesión monótona creciente

$$0'7 < 0'77 < 0'777 < 0'7777 < \ldots$$

está acotada superiormente, pues todos sus términos se mantienen inferiores a 0'8. Esta sucesión, por tanto, es convergente, y su límite es igual a $\frac{7}{9}$, como puede verse.

Una sucesión monótona decreciente se dice que está acotada inferiormente cuando todos sus términos se conservan mayores que un número fijo k', llamado cota.

Se demuestra asimismo que *toda sucesión monótona decreciente, acotada inferiormente, es convergente y su límite es igual o mayor que la cota.*

EJEMPLO. — La sucesión monótona decreciente

$$\frac{2}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \ldots;\ \frac{n+1}{n};\ \ldots$$

está acotada inferiormente, pues todos sus términos se conservan mayores que 1. Dicha sucesión, por tanto, es convergente, y su límite es igual a 1, como es fácil probar. Obsérvese que, en este caso, el límite coincide con la cota.

EJERCICIOS

Hallar la expresión del término general de las siguientes sucesiones y determinar el límite, cuando exista:

35. $\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \ldots$

36. $\frac{2}{3};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{7};\ \frac{8}{9};\ \ldots$

37. $2 \cdot 10;\ 2 \cdot 10^2;\ 2 \cdot 10^3;\ 2 \cdot 10^4;\ \ldots$

38. $\frac{1}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{7};\ \frac{4}{9};\ \ldots$

39. $\frac{1}{2};\ \frac{4}{5};\ \frac{9}{10};\ \frac{16}{17};\ \ldots$

40. $-3;\ 5;\ -7;\ 9;\ -11;\ \ldots$

Escribir los cinco primeros términos y hallar el límite (si existe) de las sucesiones cuyo término general es:

41. $a_n = n^2 - 1$

42. $a_n = 3n^2 - 12$

43. $a_n = (-1)^n (n+2)$

44. $a_n = \frac{3n}{n^2 - 1}$

45. $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

46. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

47. Escribir los términos que ocupan los lugares 44, 72 y 116 en la sucesión

$$\frac{1}{3};\ 1;\ \frac{1}{9};\ -1;\ \frac{1}{27};\ 1;\ \frac{1}{81};\ -1;\ \ldots$$

Razonar si la sucesión tiene límite o carece de él.

48. Si una sucesión monótona creciente no está acotada, ¿tiene límite finito? Razonar la contestación y poner un ejemplo aclaratorio.

5. Cálculo de límites

30. Operación de paso al límite. — El proceso que se sigue para hallar el límite de una sucesión se llama *operación de paso al límite.*

No siempre es posible la operación de paso al límite, ni hay reglas fijas para efectuarla, aun sabiendo que la sucesión tiene límite. Nosotros nos limitaremos a los casos más sencillos y de mayor interés.

31. Producto de infinitésimos. — *El producto de un infinitésimo* α_n *por una constante, o por una variable acotada superiormente* k_n, *de valor absoluto inferior a* k, *es un infinitésimo.*

Demostramos el segundo caso, que comprende al primero.

En efecto: si $\alpha_n \longrightarrow 0$, a partir de un cierto valor de n es

$$\alpha_n < \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{y el producto} \quad \alpha_n \cdot k_n < \frac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon$$

Por tanto,

$$\lim \alpha_n \cdot k_n = 0$$

32. Suma de infinitésimos. — *La suma de un número finito de infinitésimos es también un infinitésimo.*

En efecto: sean los h infinitésimos

$$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \ldots, \omega_n$$

siendo h un número finito.

Por hipótesis, tenemos:

$$\alpha_n < \varepsilon \qquad \beta_n < \varepsilon \qquad \gamma_n < \varepsilon \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \omega_n < \varepsilon$$

y sumando estas desigualdades,

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \ldots + \omega_n < h\,\varepsilon$$

pero, según el teorema anterior, $h\varepsilon \longrightarrow 0$

luego,

$$\lim\ (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \ldots + \omega_n) = 0$$

33. Límite de una suma. — I. CASO GENERAL. — *El límite de la suma de varias sucesiones es igual a la suma de los límites de los sumandos.*

En efecto: sean las sucesiones

$$a_n,\ b_n,\ c_n,\ \ldots,\ r_n$$

y sus límites respectivos

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ r$$

Por definición de límite, se tiene:

$$a_n - a < \varepsilon \qquad b_n - b < \varepsilon \qquad c_n - c < \varepsilon \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad r_n - r < \varepsilon$$

y sumando

$$(a_n + b_n + c_n + \ldots + r_n) - (a + b + c + \ldots + r) < h\,\varepsilon$$

$$\therefore\ \lim\ (a_n + b_n + c_n + \ldots + r_n) = a + b + c + \ldots + r$$

Análogamente (restando en vez de sumar) demostraríamos que *el límite de la diferencia de dos sucesiones es igual a la diferencia entre los límites del minuendo y sustraendo.*

II. CASOS PARTICULARES. — 1) *Si uno o varios de los sumandos tienden a $+\infty$ y los restantes tienen límite finito, la suma tiende a $+\infty$.*

En efecto: si uno o más sumandos pueden llegar a ser mayores que todo número, también lo será la suma.

Esto se expresa con las igualdades simbólicas

$$+\infty + b = +\infty$$
$$+\infty + \infty = +\infty\ .$$

2) Análogamente, podemos enunciar: *Si uno o varios sumandos tienden a* $-\infty$ *y los restantes tienen límite finito, la suma tiende a* $-\infty$.

Representamos esto simbólicamente, escribiendo

$$-\infty + b = -\infty$$
$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

3) *Si en la suma de dos sucesiones* a_n *y* b_n, *un sumando tiende a* $+\infty$ *y el otro a* $-\infty$, *con el solo conocimiento de estos límites no puede determinarse el límite de la suma, que puede ser finito, infinito o no tenerlo.*

Se dice entonces que el límite se presenta en la *forma indeterminada*

$$+\infty - \infty$$

34. Límite de un producto. — I. CASO GENERAL. — *El límite del producto de varias sucesiones es igual al producto de los límites de los factores.*

En efecto: supongamos que los factores sean dos, a_n y b_n, cuyos límites respectivos designaremos por a y b.

Por definición de límite se tiene

$$\begin{matrix} a_n - a < \varepsilon \\ b_n - b < \varepsilon \end{matrix} \quad \text{de donde} \quad \begin{matrix} a_n < \varepsilon + a \\ b_n < \varepsilon + b \end{matrix}$$

y multiplicando las dos últimas desigualdades

$$a_n b_n < \varepsilon^2 + \varepsilon a + \varepsilon b + a b$$

o bien

$$a_n b_n - a b < \varepsilon^2 + \varepsilon a + \varepsilon b$$

pero el segundo miembro es suma de infinitésimos, y por ello, un infinitésimo. Luego,

$$\lim a_n b_n = a b$$

II. CASOS PARTICULARES. — 1) *Si uno o varios de los factores tienden a* ∞ *y los restantes a un límite finito, distinto de cero, el producto tiende a* ∞.

El signo del producto dependerá del de los factores.

En efecto: supongamos el caso de dos factores a_n y b_n, tales que

$$\lim a_n = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim b_n = b \neq 0$$

Como $a_n \longrightarrow \infty$ y b_n es en valor absoluto mayor que un número k, a partir de cierto valor de n en adelante, se tiene

$$| a_n | > \frac{h}{k}$$

siendo h un número arbitrariamente grande. Luego,

$$| a_n b_n | = | a_n | \cdot | b_n | > \frac{h}{k} \cdot k = h$$

de donde $$\lim a_n b_n = \infty$$

Representamos esto escribiendo, simbólicamente,

$$\infty \cdot b = \infty$$

Análogamente, cuando son varios los factores que tienden a infinito, el teorema es válido si convenimos en que sea

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

siendo aplicable la regla de los signos del producto.

2) *Si en el producto de dos sucesiones,* a_n *y* b_n, *un factor tiende a cero y el otro a* ∞, *con el solo conocimiento de estos límites no puede determinarse el límite del producto.*

Se dice entonces que el límite se presenta en la *forma indeterminada*

$$0 \cdot \infty$$

35. Límite de un cociente. — I. CASO GENERAL. — *El límite del cociente de dos sucesiones es igual al cociente de los límites del dividendo y divisor, cuando el de éste es distinto de cero.*

Sean las sucesiones a_n y b_n, y sus límites respectivos, a y b.

Para probar que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

basta demostrar que es un infinitésimo la diferencia

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} = \frac{1}{b_n b}(a_n b - a b_n) \qquad [1]$$

En efecto: esta diferencia es un producto de dos factores, y uno de ellos, $\frac{1}{b_n b}$, se conserva finito a partir de un valor de n en adelante, puesto que $b_n \longrightarrow b$, distinto de cero, mientras que el otro factor

$$a_n b - a b_n = a_n b - a b - a b_n + a b = b(a_n - a) - a(b_n - b)$$

es un infinitésimo, según lo demostrado anteriormente (31).

Y como el producto de un infinitésimo por una variable finita es un infinitésimo, queda demostrado que es infinitésima la diferencia [1].

II. CASOS PARTICULARES. — 1) *Si el dividendo tiene límite finito distinto de cero y el divisor tiende a cero, el cociente tiende a infinito.*

En efecto: si el dividendo a_n tiene límite finito, su valor absoluto, desde cierto valor de n en adelante, se conserva mayor que cierto número k (cota); por otra parte, como el divisor $b_n \longrightarrow 0$, será menor que cualquier número. Luego, si representamos por A un número positivo arbitrariamente grande, se tiene

$$a_n > k \qquad \text{y} \qquad |b_n| < \frac{k}{A}$$

y, en consecuencia,

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} > \frac{k}{k/A} = A$$

lo que significa que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

Representamos esto por la igualdad simbólica

$$\frac{a}{0} = \infty$$

2) *Si el dividendo y el divisor tienden a cero, con el solo conocimiento de estos límites no puede determinarse el límite del cociente.*

Se dice entonces que el límite se presenta en la *forma indeterminada*

$$\frac{0}{0}$$

3) *Si el dividendo permanece finito y el divisor tiende a infinito, el cociente tiende a cero.*

En efecto: como

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

y en este producto el primero de los factores es finito y el otro un infinitésimo, el resultado tendrá por límite cero (31).

Esto lo representamos por la igualdad simbólica

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

4) *Si el dividendo tiende a infinito y el divisor se conserva finito, el cociente tiende a infinito.*

En efecto: como

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

y en este producto el primero de los factores tiende a infinito y el otro es finito, el resultado tendrá por límite infinito.

Esto lo representamos por

$$\frac{\infty}{b} = \infty$$

5) *Si el dividendo y el divisor tienden a infinito, con sólo el conocimiento de estos límites no puede determinarse el límite del cociente.*

Se dice entonces que el límite se presenta en la *forma indeterminada*

$$\frac{\infty}{\infty}$$

36. Resumen. — Como síntesis de lo expuesto en los párrafos anteriores tenemos el siguiente cuadro:

CÁLCULO DE LÍMITES

FÓRMULAS	IGUALDADES SIMBÓLICAS	EXPRESIONES INDETERMINADAS
$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$	$+\infty \pm b = +\infty$ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $-\infty \pm b = -\infty$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$+\infty - \infty$
$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$	$\infty \cdot b = \infty$ $\infty \cdot \infty = \infty$	$0 \cdot \infty$
$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$	$\frac{a}{0} = \infty$ $\frac{a}{\infty} = 0$ $\frac{\infty}{b} = \infty$	$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

37. Expresiones indeterminadas. — Como acabamos de ver, existen casos en los que el límite de una operación no puede determinarse con el solo conocimiento de los límites de las sucesiones que forman los datos, y por ello se les llama *casos de indeterminación* o *expresiones indeterminadas.*

Los dos más importantes son los que se presentan al hallar el límite del cociente de dos infinitésimos (expresión 0/0), o de dos infinitos (expresión ∞/∞). En los párrafos siguientes tratamos de estos dos casos.

38. Comparación de infinitésimos por cociente. — Dados dos infinitésimos α_n y β_n, al estudiar el límite del cociente $\alpha_n : \beta_n$ pueden presentarse los cinco casos siguientes:

1.° Que dicho cociente no admita límite. En este caso se dice que los infinitésimos α_n y β_n *no son comparables.*

2.° Que $\lim (\alpha_n : \beta_n) = 0$. En este caso se dice que α_n es de *orden infinitesimal superior* a β_n.

3.° Que $\lim (\alpha_n : \beta_n) = \infty$. En este caso se dice que α_n es de *orden infinitesimal inferior* a β_n.

4.° Que $\lim (\alpha_n : \beta_n) = L \neq 0$. Diremos entonces que α_n y β_n son del *mismo orden* (L, finito).

5.° Que $\lim (\alpha_n : \beta_n) = 1$, y se dice entonces que α_n y β_n son *equivalentes*.

39. Límite del cociente de dos polinomios en n, cuando n tiende a infinito. — Sean A_n y B_n dos polinomios en n de la forma

$$A_n = a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + a_2 n^{m-2} + \ldots + a_m$$
$$B_n = b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \ldots + b_p$$

El límite de su cociente será

$$\lim \frac{A_n}{B_n} = \lim \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + a_2 n^{m-2} + \ldots + a_m}{b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \ldots + b_p}$$

y dividiendo numerador y denominador por n^m, resulta:

$$\lim \frac{A_n}{B_n} = \lim \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n^2} + \ldots + \dfrac{a_m}{n^m}}{b_0 n^{p-m} + b_1 n^{(p-1)-m} + \ldots + \dfrac{b_p}{n^m}}$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$, los términos del numerador, a partir del segundo, tienden siempre a cero. Esto supuesto, podemos considerar en la expresión denominador los casos siguientes:

1.° Que $m > p$. En este caso, todos los términos del denominador quedan divididos por una potencia de n, por lo que tienden a cero, y

$$\lim \frac{A_n}{B_n} = \lim \frac{a_0}{0} = \infty$$

2.° Que $m < p$. Entonces, como los términos del denominador tienden unos a ∞ y otros a cero, resulta:

$$\lim \frac{A_n}{B_n} = \lim \frac{a_0}{\infty} = 0$$

3.° Que $m = p$. Entonces, todos los términos del denominador tienden a cero, menos el primero, que se reduce a b_0. Por tanto,

$$\lim \frac{A_n}{B_n} = \lim \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0}{b_0}$$

Expresando en palabras los resultados obtenidos, diremos: *El límite del cociente de dos polinomios en* n *cuando* n *tiende a infinito, es igual:*

1.° *A infinito, si el dividendo es de mayor grado que el divisor.*

2.° *A cero, si el dividendo es de menor grado que el divisor.*

3.° *Al cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado, si el dividendo y el divisor son de igual grado.*

EJEMPLOS:

1.° $$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^6 - 2n^4 + n^3 + 5n^2 - 6}{4n^5 + 2n^4 - 3n^2 - n + 7} = \infty$$

2.° $$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3 - 2n^2 + n - 9}{3n^5 + 4n^4 - n^2 + 2n + 1} = 0$$

3.° $$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 4n^2 - 7}{2n^4 - 5n^3 + 6} = \frac{3}{2}$$

EJERCICIOS

49. Si a_n es una sucesión cuyos términos valen

1; 1'5; 1'58; 1'583; 1'5833; 1'58333; ...

y b_n es otra sucesión de términos iguales a

0; 0'7; 0'72; 0'727; 0'7272; 0'72727; ...

determinar los límites:

1.°, de a_n y b_n; 2.°, de $a_n + b_n$; 3.°, de $a_n - b_n$; 4.°, de $a_n \cdot b_n$; 5.°, de $a : b_n$.

50. Dadas las sucesiones de términos generales

$$a_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 - 1} \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{2n - 1}{n - 1}$$

en las que $n \to \infty$, hallar: 1.°, sus respectivos límites; 2.°, el límite de su suma; 3.°, el límite de su producto; 4.°, el límite de su cociente.

51. El límite de la sucesión de término general $\frac{3n}{n^2-1}$ es cero, y el de la $\frac{4n^2}{1+n}$ es infinito. ¿Cuál es el límite del producto de ambas sucesiones?

52. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{5n^2};\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n-2}{4n+1}-\frac{n+3}{n+7}\right];$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^2+n}{n+3}\cdot\frac{3n^2+5}{2n+1}\right]$$

53. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right];\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^3+6}{2n^2+1}:\frac{2n+7}{3n-2}\right]$$

54. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}\right];\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(n-4)(3n^2+2)}{n(n+1)(n+2)}$$

55. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x}{x-1}\right];\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$$

56. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-6n+1}{n^2+4n+2};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+5}{2n^4-1};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{7n^3+5n-3}{n^2+2}$$

57. Calcular, cuando n tiende a infinito, el límite de la sucesión de término general $\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^3-(n-5)^3}$.

58. Calcular el límite de la expresión $\frac{x+1}{7x^2}\cdot\frac{x^3}{x^2-1}$ cuando $x\to\infty$.

6. Logaritmos neperianos

40. El número e. — El número *e*, de extraordinaria importancia en Matemáticas, es el límite de la sucesión de término general $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n tiende a infinito, es decir, el límite de la sucesión cuyos primeros términos son

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1;\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2;\quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3;\quad \left(1+\frac{1}{4}\right)^4;\ \ldots$$

o sea

$$2,\quad \frac{9}{4}=2'25;\qquad \frac{64}{27}=2'37\ldots;\qquad \frac{625}{256}=2'44\ldots;\ \ldots$$

Si desarrollamos el término general de la sucesión anterior aplicando la fórmula del binomio de Newton, obtendremos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+$$
$$+\ \ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

resultado que podemos escribir así, permutando los denominadores de los factores de cada término, a partir del tercero:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}+$$
$$+\ \ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n^n}\cdot\frac{1}{n!}$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{n}{n}=1;\ \frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n};\ \frac{n-2}{n}=1-\frac{2}{n};\ \frac{n-3}{n}=1-\frac{3}{n};\ \ldots \text{ etc.}$$

resulta

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}+$$

$$+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}$$

Al tender n a infinito, las diferencias

$$\left(1-\frac{1}{n}\right),\left(1-\frac{2}{n}\right),\left(1-\frac{3}{n}\right),\text{ etc.}$$

tienden a la unidad; luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$$

o bien,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\right)$$

Como $2\cdot3>2^2;\ 2\cdot3\cdot4>2^3;\ \ldots;\ 2\cdot3\ldots n>2^{n-1}$, será

$$\frac{1}{2\cdot3}<\frac{1}{2^2};\ \frac{1}{2\cdot3\cdot4}<\frac{1}{2^3};\ \ldots;\ \frac{1}{2\cdot3\ldots n}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Observando que el segundo miembro, a partir del término $\frac{1}{2}$, es la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada de razón $\frac{1}{2}$, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2+1=3$$

luego,

$$2 < \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \text{o sea} \quad 2 < e < 3$$

Se demuestra que el número e no es racional; en el cálculo se sustituye por valores aproximados, que resultan de considerar un determinado número de términos en la serie

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Si designamos por u_1, u_2, u_3, u_4, ..., a estos términos y observamos que cada uno es igual al anterior dividido por el lugar que éste ocupa, hallaremos un valor aproximado de e del modo siguiente:

$$\begin{array}{lllll}
u_1 & = & & & 1 \\
u_2 & = u_1 & : & 1 = & 1 \\
u_3 & = u_2 & : & 2 = & 0'5 \\
u_4 & = u_3 & : & 3 = & 0'16666666666 \\
u_5 & = u_4 & : & 4 = & 0'04166666666 \\
u_6 & = u_5 & : & 5 = & 0'00833333333 \\
u_7 & = u_6 & : & 6 = & 0'00138888888 \\
u_8 & = u_7 & : & 7 = & 0'00019841269 \\
u_9 & = u_8 & : & 8 = & 0'00002480158 \\
u_{10} & = u_9 & : & 9 = & 0'00000275573 \\
u_{11} & = u_{10} & : & 10 = & 0'00000027557 \\
u_{12} & = u_{11} & : & 11 = & 0'00000002505 \\
u_{13} & = u_{12} & : & 12 = & 0'00000000208 \\
u_{14} & = u_{13} & : & 13 = & 0'00000000016 \\
u_{15} & = u_{14} & : & 14 = & \underline{0'00000000001} \\
 & & & & 2'71828182840
\end{array}$$

El verdadero valor de e con doce cifras decimales es

$$e = 2'718281828459\ldots$$

Como se ve, el error cometido en el cálculo anterior se limita a la última cifra decimal.

41. Generalización. Otra expresión del número *e*. — Hemos visto que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

para valores de n que sean números naturales. Se demuestra que este límite se cumple para $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, siendo m un número real cualquiera, es decir, $\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$

Si en la igualdad anterior hacemos $\frac{1}{m} = \alpha$, cuando m tienda a ∞, α tenderá a 0, por lo que podremos escribir:

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

42. Interés continuo. — Entre las muchas aplicaciones del número *e* está la de poder calcular el interés compuesto cuando la acumulación del interés al capital se hace en una fracción de tiempo infinitamente pequeña o, si se permite la expresión, cuando el interés es momentáneo. En este caso se llama *interés continuo.*

Sea un capital c colocado al tanto r por uno anual. Si 1 peseta renta r en un año, es claro que en $\frac{1}{m}$ de año rentará $\frac{r}{m}$; es decir, $\frac{r}{m}$ es el tanto por uno cuando consideramos que los intereses se acumulan cada $\frac{1}{m}$ de año. Ahora bien: como un año es m veces $\frac{1}{m}$ de año, t años será mt veces $\frac{1}{m}$ de año; luego, el capital c, al cabo de t años se convierte en

$$C = c\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Una sencilla transformación en la igualdad anterior nos permite escribirla así:

$$C = c\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt} = c\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt}$$

en donde hemos hecho $\frac{m}{r} = n$.

Si $m \longrightarrow \infty$, también $n = \dfrac{m}{r} \longrightarrow \infty$; luego, para obtener la fórmula del interés continuo bastará hallar el límite de la expresión anterior. Es decir, tendremos:

$$C = \lim_{n \to \infty} c\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt} = c \cdot e^{rt}$$

puesto que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$ (*)

43. Logaritmos neperianos o naturales. — *Logaritmos naturales son aquellos cuya base es el número* e.

Se llaman también *logaritmos neperianos,* por haberlos inventado el matemático escocés NEPER (1560-1617).

Son de gran utilidad y uso en Matemáticas superiores, y en este mismo curso veremos la simplificación que con ellos se logra en algunas cuestiones.

El logaritmo neperiano de N se representa de cualquiera de estas formas:

$$\log_e N; \qquad \ln N; \qquad l N; \qquad L N$$

44. Paso de logaritmos neperianos a decimales, y recíprocamente. — Del mismo modo que existen tablas de logaritmos vulgares, las hay también de logaritmos neperianos; pero las tablas más frecuentemente usadas son las de logaritmos decimales, por lo que es conveniente saber transformar logaritmos de un sistema a otro.

I. PASO DE LOGARITMOS DECIMALES A NEPERIANOS. — Sea N un número; supongamos que su logaritmo decimal es x y su logaritmo neperiano es y. Es decir:

$$\log N = x \qquad \ln N = y$$

Por definición de logaritmo, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} N = 10^{x} \\ N = e^{y} \end{array}\right\} \text{ luego } \quad 10^{x} = e^{y}$$

(*) En esta operación de paso al límite hemos aplicado el siguiente teorema: *Si la base de una potencia tiene límite y el exponente es constante, el límite de la potencia es igual a la potencia del límite de la base.*

Tomando logaritmos decimales, resulta

$$\log 10^x = \log e^y \quad \text{o sea} \quad x = y \cdot \log e$$

de donde se deduce

$$y = \frac{x}{\log e} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\ln N = \frac{\log N}{\log e}} \qquad [1]$$

El logaritmo neperiano de un número se obtiene dividiendo su logaritmo decimal por el logaritmo decimal de e.

El divisor constante $\log e$ recibe el nombre de *módulo* del sistema de logaritmos neperianos y se representa por la letra M. Su valor es

$$M = \log e = \log 2'718281\ldots = 0'434294\ldots$$

y el de su inverso,

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\log e} = \frac{1}{0'434294\ldots} = 2'302585\ldots$$

Teniendo esto en cuenta, la fórmula anterior podrá escribirse así:

$$\ln N = \frac{\log N}{\log e} = \frac{\log N}{M} = \frac{1}{M} \cdot \log N = 2'302585\ldots \times \log N$$

es decir, se obtiene esta fórmula práctica:

$$\boxed{\ln N = 2'302585 \cdot \log N}$$

II. Paso de logaritmos neperianos a decimales. — Despejando $\log N$ en la fórmula [1], tenemos:

$$\log N = \log e \cdot \ln N = M \cdot \ln N = 0'434294 \cdot \ln N$$

o sea,

$$\boxed{\log N = 0'434294 \cdot \ln N}$$

El logaritmo decimal de un número se obtiene multiplicando el neperiano por el módulo M.

45. Relación entre el logaritmo del número *e* en un sistema de base *a* y el logaritmo neperiano de *a*. — Suponiendo que a es distinto de la unidad, siempre existirá un número x tal que $a^x = e$.

Tomando logaritmos en el sistema de base a, resulta

$$x = \log_a e$$

y haciéndolo en el de base e (logaritmos neperianos), se obtiene

$$x \cdot \ln a = 1$$

de donde se deduce que

$$x = \frac{1}{\ln a}$$

e igualando los valores de x, tendremos:

$$\boxed{\log_a e = \frac{1}{\ln a}}$$

EJERCICIOS

59. Calcular por logaritmos el término centésimo de la sucesión que define al número *e*.

60. ¿En cuánto se convertirán 1.000 pesetas a interés continuo durante 12 años al 4 % anual?

61. ¿Qué capital será necesario colocar al 0'06 por uno para que en 7 años se convierta en 80.000 ptas. capitalizando a interés continuo.

62. Calcular el tiempo que es necesario para que un capital colocado al 4 % anual se duplique: 1.º, a interés simple; 2.º, a interés compuesto; 3.º, a interés continuo.

63. Dado un número x, ¿cuál de estas desigualdades es cierta?:

$$\ln x \gtrless \log x$$

64. ¿Hay algún número para el que se verifique $\ln x = \log x$?

65. ¿Cuál es mayor, el logaritmo decimal de e o el logaritmo neperiano de 10? Explicar la razón.

66. ¿Son válidas para los logaritmos neperianos las reglas dadas para el cálculo de las características de los logaritmos decimales?

67. Determinar los intervalos en que pueden variar x, y, z, para que sea:

1) $0 \leqq \ln x \leqq 1 \leqq \ln y \leqq 2 \leqq \ln z \leqq 3$

2) $-3 \leqq \ln x \leqq -2 \leqq \ln y \leqq -1 \leqq \ln z \leqq 0$

Hallar los logaritmos decimales de:

68. 39'021; e^2; $\dfrac{26\,e}{48}$; 3'25489; $10\,\pi$

69. 0'0049063; $\sqrt{e}$; $\dfrac{73\,e^3}{19}$; 0'193407; $10^3\,\pi$

70. 331'207; $142\,e^{0'6}$; $\dfrac{12}{9\,e^3}$; 0'00318963; $\sqrt[3]{10\,\pi}$

71. Sabiendo que $\log 2 = 0'301030$, calcular el logaritmo neperiano de los números 100, 1.000, 2, 16, 32, 5, 25 y 250.

72. Hallar los logaritmos neperianos de los números 9, 72'5 y 0'692.

73. Transformar en decimales los logaritmos neperianos siguientes:

1'724308; 6'317920; $\overline{2}$'308642.

74. Hallar los números cuyos respectivos logaritmos neperianos son:

2'384026; 7'045622; $\overline{1}$'740813.

75. Hallar un número cuyo logaritmo neperiano exceda en 3 a su logaritmo decimal.

76. Calcular el valor de x que verifica la igualdad $\ln x = \log x - 2$.

77. Resolver la ecuación $2 \log x + 3 \ln x = 5$.

7. Las funciones

46. Constantes y variables. — *Constante es una letra o símbolo que representa un número fijo y determinado.*

Variable es una letra o símbolo que representa cada uno de los números de un conjunto. Este conjunto se denomina *campo de variabilidad* de la variable.

Si los valores que puede tomar una variable son todos los comprendidos entre dos números reales, se dice de la variable que es *continua* entre dichos números.

Cuando los valores que puede tomar una variable son completamente arbitrarios, es decir, cuando su variabilidad no está sujeta a los valores de ninguna otra magnitud, entonces la variable se llama *variable independiente.*

Por el contrario, si los valores que toma una variable dependen de los de otras magnitudes, la variable se denomina *variable dependiente* o *función.*

47. Intervalo. — *Intervalo es el conjunto de números reales comprendidos entre dos fijos, que se llaman extremos.*

El intervalo puede ser *abierto* o *cerrado.* Es abierto si no comprende a sus extremos y cerrado si los comprende.

EJEMPLO. — Suponiendo que 3 y 7 son los extremos de un intervalo, éste irá representado por (3, 7). La variable x cuyos valores son los comprendidos en dicho intervalo ha de ser tal que $3 < x < 7$, cuando sea abierto, y $3 \leqq x \leqq 7$ si es cerrado.

Amplitud del intervalo es la diferencia entre sus extremos. La amplitud del intervalo (3, 7) es 4; la del intervalo (−2, 11) es 13.

Si alguno de los extremos es infinito, el intervalo se considera *infinito.* Así, $(1, +\infty)$ y $(-\infty, +\infty)$ son intervalos infinitos; el primero expresa que la variable x es igual o mayor que 1, y el segundo, que la variable x puede ser cualquier número real.

48. Concepto de función. — DEFINICIÓN. *Se dice que la variable* y *es función de la variable independiente* x, *en un intervalo* (a, b) *si a cada valor de* x *comprendido en ese intervalo corresponde un valor de* y.

Estas funciones se denominan *uniformes,* mientras que si a cada valor de x corresponden dos o más para y, la función se llama *multiforme.* De no advertir lo contrario, nosotros sólo nos referiremos a las uniformes,

Para representar que y es función de x se escribe $y = f(x)$, expresión que se lee: «y igual función f de x», o simplemente: «y igual f de x».

La letra f se llama *característica de la función,* y representa, en forma simbólica, el conjunto de operaciones que es necesario efectuar con cada valor de x para obtener el correspondiente de y.

Cuando se consideran distintas funciones de x, se emplean diferentes letras, como en

$$u = f(x), \qquad v = g(x), \qquad w = h(x),$$

o bien una misma letra con subíndices:

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n \qquad \text{o} \qquad f_1(x),\ f_2(x)\ \ldots,\ f_n(x)$$

Se dice de una función $y = f(x)$ que *está definida* para un cierto valor x_1 de x, cuando al hacer $x = x_1$, la función toma un valor real determinado. Una función está definida en un intrevalo (a, b) cuando lo está para todo valor de x comprendido en dicho intervalo. El intervalo de valores de x en que está definida la función se llama *campo de definición o de existencia de la función.*

EJEMPLOS. — La función $y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$, en la que a_0, a_1, ... son constantes numéricas cualesquiera, está definida para todo valor de x.

La función $y = \sqrt{1 - x^2}$ está definida solamente en el intervalo $(-1, +1)$.

La función $y = \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - x}$ está definida para todo valor de x, a excepción de los dos siguientes: $x = 0$ y $x = 1$, ya que para ellos se anula el denominador.

49. Representación gráfica de las funciones. — Como es sabido, el empleo de las coordenadas cartesianas permite obtener la imagen o representación gráfica de las funciones. Esta representación es muy conveniente para el estudio de las propiedades de las funciones.

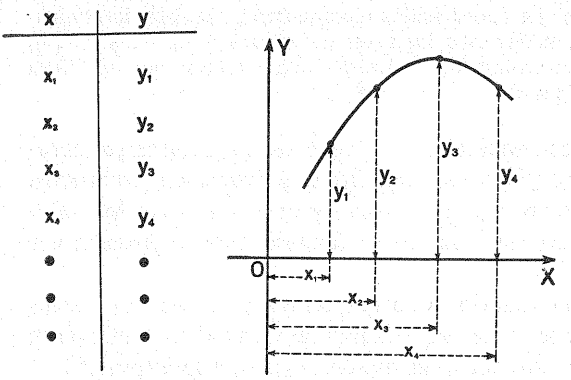

FIG. 13

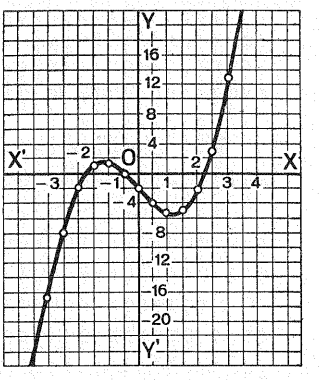

FIG. 14

Sea la función $y = f(x)$. Formemos una tabla de valores de dicha función y representemos en un sistema de ejes ortogonales (fig. 13) los puntos cuyas coordenadas sean

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \quad (x_4\ y_4), \quad \ldots$$

Esto se logra tomando, para cada punto, como abscisa el valor de la variable independiente x, y como ordenada el correspondiente de la función y.

Teóricamente, podríamos hacer la misma operación para todos los valores posibles de x, y el conjunto de puntos así obtenidos sería una línea continua que se denomina *representación gráfica* o *geométrica* de la función $y = f(x)$. En la práctica, se dibujan los puntos necesarios para que resulten bastante próximos, de manera que, al unirlos luego «a ojo» mediante un trazo continuo, se obtenga una curva sensiblemente parecida a la verdadera.

EJEMPLO. — Representar gráficamente la función $y = x^3 - 4x - 2$.

Formaremos primeramente una *tabla de valores*, como la siguiente:

$x =$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
$y =$	-17	$-7\frac{5}{8}$	-2	$\frac{5}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	-2	$-3\frac{7}{8}$	-5	$-4\frac{5}{8}$	-2	$3\frac{5}{8}$	13

Luego, sobre un sistema de ejes coordenados rectangulares (fig. 14), determinaremos los puntos cuyas coordenadas sean los pares de valores $(-3, -17)$, $(-2\frac{1}{2}, -7\frac{5}{8})$, ..., que se corresponden en la tabla. Uniendo dichos puntos por una línea continua se tendrá la gráfica pedida.

50. Clasificación de las funciones. — Podemos considerar primeramente dos grandes grupos: *funciones analíticas y funciones empíricas.*

Analíticas. Son aquellas en las que la correspondencia entre los valores de la variable independiente y los de la función está expresada por una fórmula matemática.

Empíricas. Se llaman así cuando la correspondencia entre los valores de la variable independiente y los de la función viene dada solamente por hechos experimentales, sin fórmula matemática que la exprese.

EJEMPLOS DE FUNCIONES EMPÍRICAS. — La temperatura registrada por un termómetro a lo largo del día, tomando el tiempo como variable independiente.

La demanda de una mercancía con relación a su precio.

Las funciones analíticas se clasifican, a su vez, en *algebraicas* y *trascendentes.*

Son *algebraicas,* cuando las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son de álgebra elemental (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación).

Son *trascendentes,* cuando la variable independiente figura como exponente o como índice, o se halla afectada del signo logarítmico o de cualquiera de los que emplea la trigonometría.

He aquí las principales funciones trascendentes:

Exponenciales ..... $y = a^x, \quad y = e^x$

Logarítmicas ..... $y = \log_a x, \quad y = \ln x$

Circulares o trigonométricas

Directas .....

$y = \operatorname{sen} x$ $\quad y = \operatorname{cotg} x$

$y = \cos x$ $\quad y = \sec x$

$y = \operatorname{tg} x$ $\quad y = \operatorname{cosec} x$

Inversas (ciclométricas) ...

$y = \operatorname{arc\,sen} x$ $\quad y = \operatorname{arc\,cotg} x$

$y = \operatorname{arc\,cos} x$ $\quad y = \operatorname{arc\,sec} x$

$y = \operatorname{arc\,tg} x$ $\quad y = \operatorname{arc\,cosec} x$

Las funciones algebraicas pueden ser *explícitas* o *implícitas.*

Son *explícitas,* cuando por simple sustitución podemos obtener en la ecuación que las define los valores de y que corresponden a los dados a x. Es decir, una función es explícita cuando y aparece despejada.

EJEMPLOS:

$$y = 3x + 2; \qquad y = 2x^2 - 3x + 1; \qquad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

En general, una función explícita se representa por $y = f(x)$.

Son *implícitas,* cuando los valores de y correspondientes a los dados a x no se pueden obtener por simple sustitución, sino que es preciso efectuar operaciones y despejar y.

EJEMPLOS:

$$2x + 5y - 3 = 0; \qquad 4x - 7y + 1 = 0; \qquad 2y + \frac{3x}{5} = y - x$$

En general, una función implícita se representa por $f(x, y) = 0$.

Las funciones implícitas se transforman en explícitas despejando y de la ecuación que las define, si es posible.

Así, la forma explícita de los ejemplos anteriores será, respectivamente:

$$y = \frac{3 - 2x}{5}; \qquad y = \frac{4x + 1}{7}; \qquad y = -\frac{3x}{5} - x$$

Las funciones explícitas se dividen, a su vez, en *racionales* e *irracionales.* En las primeras, la variable x no figura debajo del signo radical ni lleva exponente fraccionario; en las segundas, la variable x aparece debajo del signo radical o está afectada de exponente fraccionario.

Por último, las funciones racionales pueden ser *enteras* o *fraccionarias,* según que la expresión del segundo miembro sea entera o fraccionaria con relación a la variable independiente x.

Podemos resumir la clasificación establecida en el siguiente cuadro:

- Funciones
  - analíticas
    - algebraicas
      - explícitas
        - racionales
          - enteras
          - fraccionarias
        - irracionales
      - implícitas
    - trascendentes
      - exponenciales
      - logarítmicas
      - circulares
  - empíricas

51. Función de función. — Es una función cuya variable depende de otra y ésta, a su vez, de otra, etc.

Así, por ejemplo, si es $y = u^2$ y $u = 1 - x$, se tiene, sustituyendo, $y = (1-x)^2$; decimos entonces que y es función de x por intermedio de u, o bien, que y es *función de función* de x.

En general, si:

$$y = f(u) \quad \text{y} \quad u = \varphi(x), \quad \text{escribiremos} \quad y = f[\varphi(x)]$$

52. Función de varias variables. — Se denomina así a la función que depende de dos o más variables. Su notación es

$$y = f(x,\ z,\ u,\ \ldots)$$

EJEMPLOS. — El valor numérico del polinomio $x^2 - 2xy + y^2 + 3$ es función de las variables independientes x e y.

El interés producido por un capital es función del rédito y del tiempo en que estuvo prestado.

El espacio recorrido por un móvil es función de la velocidad y del tiempo que lleva recorriendo.

El volumen de un ortoedro es función de sus tres dimensiones.

53. Límite de una función. — I. LÍMITES FINITOS. — *Se dice que una función* y = f(x) *tiende a un límite* L, *al tender la variable* x *hacia el límite* a, *cuando a una sucesión cualquiera de valores de* x *que tenga por límite* a, *corresponde otra sucesión de valores de* f(x) *que tiene por límite* L.

Esto se representa simbólicamente así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{o bien} \quad f(x) \longrightarrow L, \text{ cuando } x \longrightarrow a$$

y se lee: «límite de función efe de x, cuando x tiende a a, es igual a L», o bien: «función efe de x tiende a L, cuando x tiende a a».

EJEMPLO. — El límite de la función $f(x) = x^3 + 3$, cuando x tiende a 1, es 4.

En efecto: Demos a x una serie de valores que formen una sucesión que tienda a 1 y hallemos los correspondientes de $f(x)$. Si elegimos, por ejemplo, la sucesión: 0'9; 0'99; 0'999; ..., tendremos:

variable x	0'9	0'99	0'999	0'9999	...
función $f(x)$	3'81	3'9801	3'998001	3'99980001	...

En esta tabla de valores podemos observar que las diferencias entre los valores dados a x y la unidad, y las diferencias entre los valores obtenidos para $f(x)$ y 4, van haciéndose cada vez menores; de tal modo que es posible obtener diferencias tan pequeñas como se quiera, con solo tomar términos de las sucesiones suficiente-

mente avanzados. Vemos, por tanto, que al tender la sucesión de valores de x a 1, la sucesión de valores de $f(x)$ tiende a 4, lo que expresamos diciendo que la función $f(x)$ tiene por límite 4, cuando x tiende a 1.

Advertencia. — Cuando una función $f(x)$ no está definida para $x = a$, pero lo está para todos los valores próximos a a, y existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se considera a L como el valor de la función para $x = a$.

En este caso suele llamarse a L verdadero valor de la función para $x = a$.

EJEMPLO. — Sea la función $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3}$ cuyo límite queremos hallar, cuando x tiende a 3.

Observemos que el numerador y denominador se anulan al sustituir x por 3, lo cual indica que ambos términos son divisibles por $x - 3$. Por consiguiente, para todos los valores de x, excepto para $x = 3$, se verifica

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$

es decir, que el límite de la función propuesta será el mismo que el de

$$\frac{x+2}{x-1}, \text{ y como } \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x-1} = \frac{5}{2}, \text{ diremos que } \frac{5}{2}$$

es también el límite de la función dada o que ése es su *verdadero valor* para $x = 3$.

II. INFINITÉSIMOS. — Un caso particular interesante del límite finito es aquel en que el límite vale cero, y, aplicado a las funciones, da lugar a la siguiente definición: *Se dice que una función* $f(x)$ *es un infinitésimo en el punto* $x = a$, *si se verifica que* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Téngase en cuenta que por infinitésimo se entiende, no el valor cero del límite, sino la variable misma que tiende a cero.

EJEMPLOS. — 1) Son infinitésimos, cuando x tiende a cero, las siguientes funciones:

$$y = x^2; \qquad y = \sqrt{x}; \qquad y = \operatorname{sen} x; \qquad y = 1 - \cos x$$

2) También son infinitésimos, cuando x tiende a a, las funciones:

$$y = x - a; \qquad y = x^5 - a^5; \qquad y = \log \frac{x}{a}; \qquad y = \operatorname{tg}(x - a)$$

III. LÍMITES INFINITOS. — *Se dice que una función* $y = f(x)$ *tiene por límite infinito o que crece infinitamente en el punto* $x = a$, *cuando a una*

sucesión cualquiera de valores de x *que tenga por límite* a, *corresponde otra sucesión de valores de* f(x) *que tiene por límite infinito.*

Esto lo representamos simbólicamente del siguiente modo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{o bien} \quad f(x) \longrightarrow \infty, \text{ cuando } x \longrightarrow a$$

EJEMPLO. — La función $y = \dfrac{3}{x+2}$ tiene por límite ∞, cuando x tiende a -2.

En efecto: si damos a x valores próximos a -2, resulta $x + 2$ tan próximo a 0 como queramos, y el cociente toma valores mayores que cualquier número por grande que se considere.

IV. LÍMITES PARA VALORES INFINITAMENTE CRECIENTES DE LA VARIABLE. — *Se dice que una función* $y = f(x)$ *tiende a un límite* L, *al tender la variable* x *a* ∞, *cuando a una sucesión cualquiera de valores de* x *que tienda a* ∞, *corresponde otra sucesión de valores de* f(x) *que tiene por límite* L.

54. Límites de las operaciones con funciones. — Las propiedades de los límites de sucesiones de números se generalizan fácilmente para funciones definidas en un cierto intervalo.

De ahí que podamos hallar el límite de una suma, producto o cociente de funciones teniendo en cuenta lo estudiado anteriormente (párrafos 33, 34 y 35).

Así, si se verifica que

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$$

tendremos:

1) *Suma:* $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = L_1 \pm L_2$

2) *Producto:* $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = L_1 \cdot L_2$

3) *Cociente:* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ (siempre que $L_2 \neq 0$)

55. Incrementos. — Sea la función $y = f(x)$ e y_1, y_2 dos valores de ella que corresponden, respectivamente, a los valores x_1, x_2 de la variable independiente; es decir, supongamos que

$$y_1 = f(x_1) \qquad \text{e} \qquad y_2 = f(x_2)$$

La diferencia $x_2 - x_1$ se denomina *incremento de la variable independiente* y se representa por Δx_1. Asimismo, la diferencia $y_2 - y_1$, o $f(x_2) - f(x_1)$, se llama *incremento de la función* o *incremento funcional,* representándose por Δy_1.

Según esto, escribiremos:

$$x_2 - x_1 = \Delta x_1; \qquad y_2 - y_1 = \Delta y_1 \qquad \text{o, también:} \qquad f(x_2) - f(x_1) = \Delta y_1$$

Tanto el incremento de la variable como el de la función expresan en general variaciones que pueden ser positivas o negativas.

56. Noción de continuidad. — Si la operación de trazar la gráfica de una función puede hacerse sin levantar el lápiz o pluma del papel, la línea representativa no presenta interrupciones y nos da idea de la *continuidad* de la función considerada. Tal sucede con la gráfica de la función $y = x^3 - 4x - 2$, obtenida en la figura 14.

Si por el contrario, al trazar la gráfica de una función es necesario levantar el lápiz o pluma para obtenerla en su totalidad, la línea que la representa tendrá interrupciones en su trazado, y diremos de la función que es *discontinua.*

Para dar una definición más precisa de función continua hemos de apoyarnos en la noción de límite. Y así, decimos:

Una función f(x) *es continua en un punto* x_1, *si al tender* x *a* x_1, *la función tiene por límite* $f(x_1)$, *es decir, cuando se verifica que*

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

Para que una función $f(x)$ sea continua en un punto x_1, es necesario, además, que esté definida en ese punto, y que el valor $f(x_1)$ sea finito.

Una función es continua en un intervalo (a, b), *cuando es continua para todo valor de* x *comprendido entre* a *y* b, *o sea, cuando lo es para todos los puntos de dicho intervalo.*

Teniendo en cuenta la definición de límite, podemos deducir la condición de continuidad de una función de la siguiente forma:

La función $y = f(x)$ *es continua para un valor* x_1 *de* x, *si la diferencia* $|f(x) - f(x_1)|$ *puede hacerse tan pequeña como se quiera haciendo convenientemente pequeña la diferencia* $|x - x_1|$.

Es decir, observando que $f(x) - f(x_1) = \Delta y$ y $x - x_1 = \Delta x$, podemos enunciar más brevemente:

Una función $y = f(x)$ *es continua en un punto* x_1, *cuando al ser el* Δx *de la variable un infinitésimo, también lo es el* Δy *de la función.*

Para estudiar la continuidad de una función efectuaremos las siguientes operaciones:

1.° Se incrementa la variable x en Δx;

2.° Se halla el Δy que corresponde a la función;

3.° Se ve si al tender a cero Δx tiende también a cero Δy. Si se verifica esto, la función es continua.

EJEMPLO. — Veamos si es continua la función $y = 2x + 3$. Para ello:

1.° Incrementemos la variable:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x) + 3 = 2x + 2\Delta x + 3$$

2.° Determinemos el incremento de la función:

$$\Delta y = 2x + 2\Delta x + 3 - (2x + 3) = 2\Delta x$$

3.° Estudiemos el Δy cuando Δx tiende a cero:

Al tender a cero Δx, la expresión $2\Delta x$, o su equivalente Δy, tiende también a cero. Luego, la función dada es continua para todo valor de x.

A los teoremas establecidos en la lección 5.ª sobre el cálculo de límites (párrafos 33, 34 y 35), corresponden los teoremas siguientes, relativos a las funciones continuas:

I. *Una suma algebraica de funciones continuas es también una función continua.*

II. *Un producto de funciones continuas es también una función continua.*

III. *Un cociente de dos funciones continuas es también una función continua, excepto para los valores de la variable que anulan al denominador.*

Como caso particular de la multiplicación, podemos añadir: *la potencia de exponente natural de una función continua es también una función continua.*

Fácilmente se prueba que *si una función* $y = f(x)$ *es continua, también lo son las funciones* $y = f(x) + C$ *e* $y = C \cdot f(x)$.

La función $y = x$ *es continua, por ser iguales el incremento de la función y el de la variable.*

Una función entera no es sino una combinación de adiciones, multiplicaciones y potencias de la variable con números fijos; de ahí que *toda función entera*

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

sea una función continua.

Una función racional fraccionaria puede considerarse como el cociente de dos funciones enteras; luego, *una función racional fraccionaria es continua para todo valor de* x, *excepto para los que anulan al denominador.*

EJEMPLO. — La función $y = \dfrac{5x - 3}{x^2 + 3x - 28}$ es continua para todo valor de x, excepto para $x = 4$ y $x = -7$, que son las raíces de $x^2 + 3x - 28 = 0$.

57. Discontinuidad. — *Una función es discontinua en un punto* x_1, *cuando no se verifica la igualdad*

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

ya sea porque no existe límite, o porque, si existe, tiene un valor distinto de $f(x_1)$.

En las funciones discontinuas sucede que, en alguno de sus puntos, a un incremento infinitésimo de la variable independiente corresponde un incremento finito, infinitamente grande o imaginario de la función. De acuerdo con esto, existen tres clases de discontinuidad, llamadas *soluciones de continuidad,* y son:

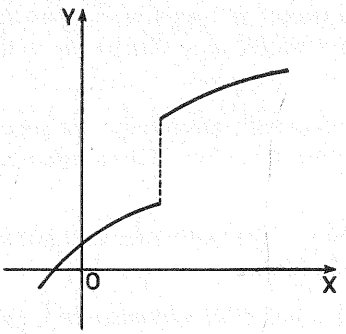

FIG. 15. — Salto brusco finito.

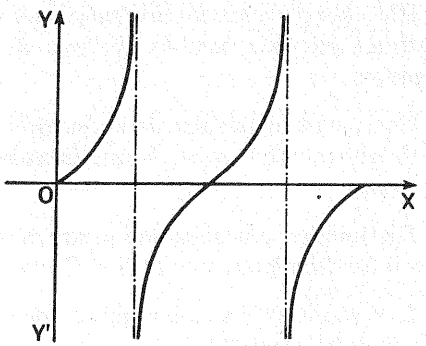

FIG. 16. — Salto brusco infinito.

a) *discontinuidad por un salto brusco finito* (fig. 15);
b) *discontinuidad por un salto brusco infinito* (fig. 16);
c) *discontinuidad por tomar la función valores imaginarios* (fig. 17).

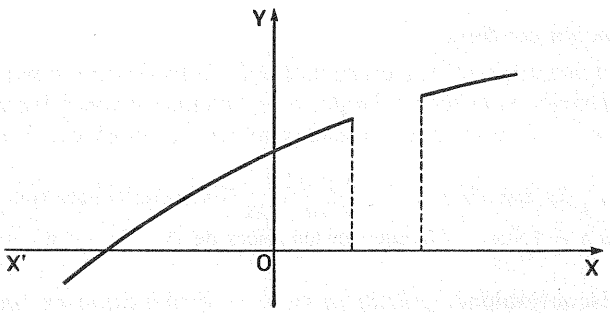

FIG. 17. — Valores imaginarios.

58. Propiedades de las funciones continuas. — De la definición de continuidad se deducen las siguientes propiedades:

1) *Si una función* f(x) *es continua en un intervalo* (a, b) *y en sus extremos toma valores de signos contrarios, existe por lo menos un punto* c *comprendido entre* a *y* b *en el cual se anula la función* (fig. 18).

2) *Si una función* f(x) *es continua en un intervalo* (a, b) *y en sus extremos toma los valores* A *y* B, *existe por lo menos un punto* c *comprendido entre* a *y* b *en el que toma la función un valor cualquiera* C *comprendido entre* A *y* B.

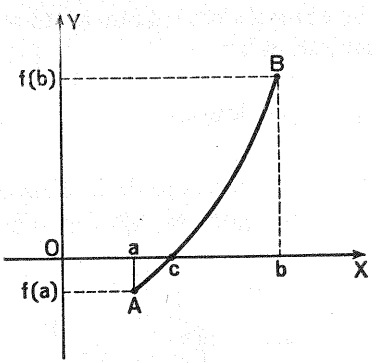

FIG. 18

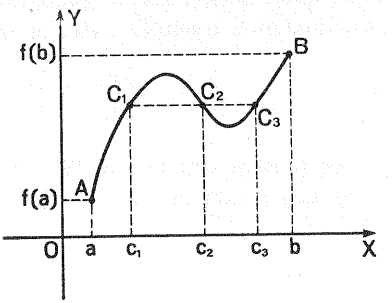

FIG. 19

Consecuencia de esta propiedad es que si una función es continua en un intervalo, para pasar de un valor a otro, toma una vez por lo menos cada uno de los valores intermedios.

59. Funciones inversas. — Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo (a, b). De acuerdo con la propiedad 2) citada en el párrafo anterior, a cada valor de y comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ corresponde, *por lo menos,* un valor de x situado entre a y b. Si solamente corresponde uno, como ocurre en la función representada en la figura 20, ese único valor de x depende del valor de y; por tanto, x es función de la variable independiente y, o sea: $x = \varphi(y)$.

Las funciones $y = f(x)$ y $x = \varphi(y)$ se llaman *inversas* y, evidentemente, están representadas por la misma curva. Esto nos dice que, si $y = f(x)$ es continua en el intervalo (a, b), lo será también en el mismo intervalo la $x = \varphi(y)$.

Para obtener en forma explícita la función inversa de una dada, se despeja en ésta la variable independiente, que pasa a ser función.

EJEMPLO:

La función inversa de $y = \dfrac{x + 3}{2x - 5}$ es $x = \dfrac{5y + 3}{2y - 1}$.

La función inversa de la exponencial $y = a^x$ es la logarítmica $x = \log_a y$.

Con el fin de acomodarse a la notación ordinaria, es costumbre también en las funciones inversas representar por y a la función, y por x a la

variable independiente. Según esto, las inversas de las dos funciones consideradas en el ejemplo anterior se escribirán así:

$$y = \frac{5x + 3}{2x - 1} \qquad \text{e} \qquad y = \log_a x$$

Dos puntos simétricos, M y M', N y N', etc., respecto de la bisectriz del primer cuadrante, en un sistema de ejes ortogonales (fig. 21), tienen

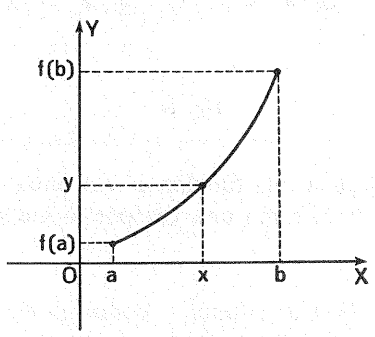

FIG. 20

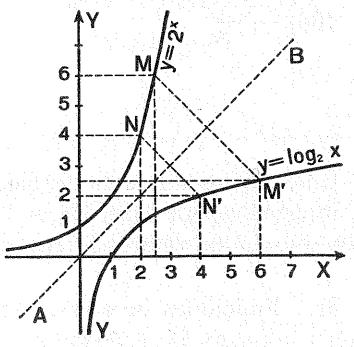

FIG. 21

la propiedad de que la ordenada de uno es abscisa del otro, y viceversa. Como es esto precisamente lo que ocurre en cada par de puntos correspondientes de dos funciones inversas, diremos:

Las gráficas de dos funciones inversas son dos líneas simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Cuando en una función $y = f(x)$, a cada valor de y corresponden varios o infinitos valores de x, ocurre generalmente que existen varias o infinitas funciones inversas.

EJEMPLOS. — 1.º La función $y = x^2$ admite dos funciones inversas: $x = +\sqrt{y}$ y $x = -\sqrt{y}$. O mejor, permutando las variables: $y = +\sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$.

2.º La función $y = \text{sen } x$ tiene infinitas funciones inversas, de las cuales sólo se acostumbra a considerar aquella en que el arco x está comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Dicha función se representa por la notación $x = \text{arc sen } y$, o bien, cambiando las variables, $y = \text{arc sen } x$.

60. Continuidad de las funciones elementales. — Una función explícita de una variable se dice que es *simple* o *elemental* cuando está determinada por una sola operación con la variable.

Son funciones elementales las siguientes:

$$y = a^x;\ y = x^n;\ y = \log_a x;\ y = \operatorname{sen} x;\ \text{etc.}$$

Estudiemos la continuidad de estas funciones.

FUNCIÓN EXPONENCIAL $y = a^x$.

1.° Incrementemos la variable:

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$$

2.° Determinemos el incremento de la función:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$$

y sacando factor común a^x, resulta

$$\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

3.° Hallemos el Δy cuando Δx tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = a^x(a^0 - 1) = 0$$

Luego, la función exponencial es continua.

FUNCIÓN POTENCIAL $y = x^n$.

Vimos ya que esta función es continua; no obstante, lo comprobaremos ahora siguiendo la regla general.

1.° Incrementemos la variable:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

2.° Determinemos el incremento de la función:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

y desarrollando el binomio, resulta

$$\Delta y = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n} (\Delta x)^n - x^n$$

3.° Reduzcamos x^n y hallemos Δy cuando $\Delta x \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Luego, la función potencial es continua.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA $y = \log_a x$.

1.° Incrementemos la variable:

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

2.° Determinemos el incremento de la función:

$$\Delta y = \log_a (x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

3.° Hallemos Δy cuando Δx tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \log_a (1+0) = 0$$

Luego, la función logarítmica es continua.

FUNCIÓN $y = \text{sen } x$.

1.° Incrementemos la variable:

$$y + \Delta y = \text{sen } (x+\Delta x)$$

2.° Determinemos el incremento de la función:

$$\Delta y = \text{sen } (x+\Delta x) - \text{sen } x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \text{sen } \frac{\Delta x}{2}$$

3.° Hallemos Δy cuando Δx tiende a cero:

Si $\Delta x \longrightarrow 0$, el factor $\text{sen } \frac{\Delta x}{2}$ tiende también a cero y, por consiguiente, será

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Luego, la función $y = \text{sen } x$ es continua.

Análogamente se demuestra la continuidad de la función $y = \cos x$ y de la función $y = \text{tg } x$, excepto para ésta en los puntos $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

EJERCICIOS

78. Presentar algunos ejemplos de funciones.

79. Expresar en cada una de las siguientes fórmulas cuál es la función y cuál la variable independiente:

$$A = 4\pi r^2; \quad s = \tfrac{1}{2}\gamma t^2; \quad f = m\gamma; \quad v = \sqrt{2gh}$$

80. Determinar el campo de existencia de las funciones:

$$y = \sqrt{x^2 - 9}; \quad y = \sqrt{1 - \frac{16}{x^2}}; \quad y = \sqrt{9 - 4x^2}; \quad y = \sqrt{(1-x)(2+x)}$$

81. Íd. de las funciones:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad y = \operatorname{sen} x; \quad y = x^n; \quad y = \log x$$

82. Íd. de las funciones:

$$y = \log(25 - x^2); \quad y = \sqrt{x^2 + x - 6}; \quad y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2x - 6}$$

Representar gráficamente las funciones siguientes:

83. $y = \dfrac{x-7}{2}$; $y = x^2 - 2x - 3$; $y = -2x^2 + x + 1$

84. $y = x^3$; $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$; $y = x^4 - 2x^2 - 8$

85. $y = \dfrac{x}{1-x}$; $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$; $y = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

86. Expresar en forma explícita que y es función de x:

$$2x^2 - 3y = x - 5y; \quad \frac{3x}{2} + \frac{4y}{5} = \frac{2}{y} - 1; \quad 5x^2 - 2y^2 - 3x = 0$$

Hallar el límite a que tiende cada una de las siguientes funciones:

87. $y = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$ cuando $x \to 1$

88. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x}{x^3 + x^2 - 6x}$ » $x \to 0$

89. $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ » $x \to 1$

90. $y = \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ » $x \to 3$

91. $y = \dfrac{2x^4 + 5x^3 - x^2 + 6}{7x^4 - 3x^2 + 4}$ » $x \to \infty$

92. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$ » $x \to 0$

93. $y = \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ » $x \to 0$

94. $y = \operatorname{tg} x \left(1 - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)$ » $x \to \dfrac{\pi}{2}$

Determinar en qué puntos es discontinua cada una de las funciones siguientes:

95. $y = \dfrac{3x - 7}{x^2 - 4}$; $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$; $y = \dfrac{5x - 7}{x^2 + 2x - 3}$

96. $y = \dfrac{3x + 7}{x^3 + 2x^2 - 35x}$; $y = \dfrac{3x + 7}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

$$y = \frac{4x - 3}{(x^2 - 3x + 2) \operatorname{sen} (3 - x)}$$

97. Hallar la inversa de cada una de las funciones siguientes:

$$y = \frac{3x + 7}{1 - 2x}; \qquad y = \log (x - 3); \qquad y = 2 - e^{x+3}$$

8. Introducción a la Geometría Analítica

61. Objeto de la Geometría Analítica. — Al idear su sistema de ejes, DESCARTES (1596-1650) consiguió dar a las Matemáticas el procedimiento para relacionar la Geometría con el Álgebra.

En cursos anteriores vimos que, establecido un sistema de ejes cartesianos, cada punto del plano tiene correspondencia biunívoca con un par de números llamados abscisa y ordenada.

Esta correspondencia entre puntos y valores numéricos puede aplicarse a toda línea susceptible de ser definida como lugar geométrico de puntos que cumplen una determinada propiedad; de donde resulta que, a cada línea corresponde una ecuación, cuyas soluciones son las coordenadas de los distintos puntos de esa línea y, recíprocamente, las coordenadas de los puntos de la línea son soluciones de la ecuación.

Basándose en esta analogía entre las líneas y sus ecuaciones, *la Geometría Analítica estudia las figuras geométricas mediante la aplicación del cálculo algebraico.*

62. Distancia entre dos puntos. — Sean los puntos A y B (fig. 22), y supongamos que x_1, y_1 son las coordenadas de A y x_2, y_2 las de B.

Trazando por A la paralela AC al eje de abscisas, se forma el triángulo rectángulo ACB, en el cual se verifica

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

pero

$$AB = d \qquad AC = x_2 - x_1 \qquad BC = y_2 - y_1$$

luego,

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

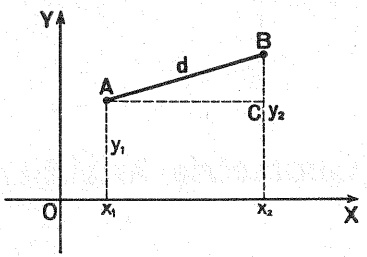

FIG. 22

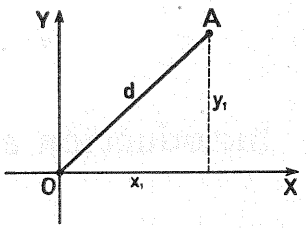

FIG. 23

Como las diferencias $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ están elevadas al cuadrado, es indiferente el orden en que se consideren los puntos, y la distancia será siempre un número *positivo.*

Si uno de los puntos es el origen de coordenadas (fig. 23) y las coordenadas del otro son x_1, y_1, la distancia será

$$\boxed{d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

EJEMPLOS. — 1.º La distancia entre los puntos $A\,(4,\ 3)$ y $B\,(-5,\ 7)$ es

$$d = \sqrt{[4-(-5)]^2 + (3-7)^2} = \sqrt{97} = 9'8$$

2.º La distancia del punto $P\,(3,\ -4)$ al origen es

$$d = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

63. Razón simple de tres puntos alineados. — Dados tres puntos alineados $A\,(x_1,\ y_1)$, $B\,(x_2,\ y_2)$, $M\,(x,\ y)$ (fig. 24), considerados en este orden, se llama *razón simple* de los mismos al cociente de las distancias de M a A y B. Se representa por (ABM) y, por consiguiente, será

$$(ABM) = \frac{MA}{MB}$$

Como estas distancias se toman sobre una recta, podemos atribuirles un signo, después de haber adoptado un sentido como positivo. Cualquiera que sea el sentido tomado como positivo, se tiene:

1) *Si* M *está entre* A *y* B, *la razón simple* (ABM) *es negativa.*

2) *Si* M *está fuera del segmento* AB, *la razón simple* (ABM) *es positiva.*

3) *Si* M *coincide con* A, *la razón simple* (ABM) *es nula.*

4) *Si* M *coincide con* B, *la razón simple* (ABM) *se hace infinita.*

Para hallar la razón simple (ABM) en función de las abscisas de A, B y M, proyectemos estos puntos sobre el eje OX. En virtud del teorema de TALES, aplicado a las rectas AB y $A'B'$, cortadas por las paralelas AA', MM' y BB', resulta:

$$(ABM) = \frac{MA}{MB} = \frac{M'A'}{M'B'} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = k$$

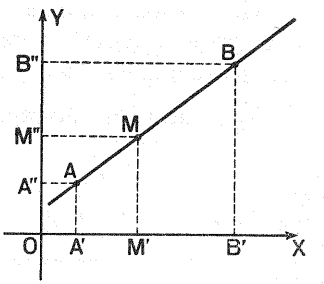

FIG. 24

Análogamente, si proyectamos sobre OY, obtendremos la misma razón en función de las ordenadas:

$$(ABM) = \frac{MA}{MB} = \frac{M''A''}{M''B''} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y} = k$$

Recíprocamente: conocido el valor k de la razón simple (ABM) y los dos primeros puntos A y B, las coordenadas (x, y) del tercer punto M se hallan resolviendo las ecuaciones

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = k \qquad \frac{y_1 - y}{y_2 - y} = k$$

obteniéndose

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} \qquad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$$

El problema, como se ve, tiene solución para todo valor de $k \neq 1$.

EJEMPLO. — Dados los tres puntos A (7, 4), B (1, 10) y C (5, 6), comprobar que están alineados y calcular las razones simples (ABC), (CAB) y (BCA).

Para que los puntos estén alineados ha de cumplirse

$$(ABC) = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y}$$

Así sucede, en efecto, puesto que

$$\frac{7-5}{1-5} = \frac{4-6}{10-6} = -\frac{1}{2}$$

Las otras dos razones simples son

$$(CAB) = \frac{5-1}{7-1} = \frac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad (BCA) = \frac{1-7}{5-7} = 3$$

64. Punto medio de un segmento. — Un caso particular del problema resuelto en el párrafo anterior es cuando la razón es igual a -1; se trata entonces de hallar las coordenadas de M, punto medio del segmento AB.

Aplicando las correspondientes fórmulas, tendremos:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

65. Ecuación de una recta: diversas formas.

I. FORMA GENERAL EXPLÍCITA. — Sea una recta MN (fig. 25). Consideremos los puntos A_1, A_2, A_3, y tracemos sus ordenadas $A_1C_1 = y_1$, $A_2C_2 = y_2$, $A_3C_3 = y_3$; las abscisas serán $OC_1 = x_1$, $OC_2 = x_2$, $OC_3 = x_3$. Por el punto M tracemos una paralela al eje de abscisas.

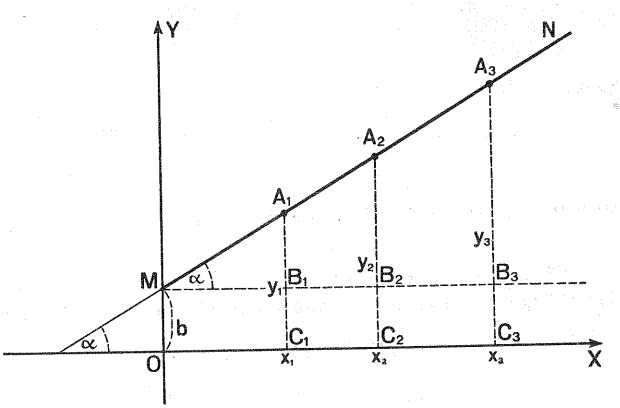

FIG. 25

Los triángulos MB_1A_1, MB_2A_2, MB_3A_3 son semejantes, por ser rectángulos que tienen el ángulo α común. Se verifica, por tanto:

$$\frac{A_1B_1}{MB_1} = \frac{A_2B_2}{MB_2} = \frac{A_3B_3}{MB_3} = \text{tg } \alpha$$

y como

$$A_1B_1 = y_1 - b; \quad A_2B_2 = y_2 - b; \quad A_3B_3 = y_3 - b;$$
$$MB_1 = OC_1 = x_1; \quad MB_2 = OC_2 = x_2; \quad MB_3 = OC_3 = x_3$$

podemos poner, si representamos por m el valor tg α:

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = \frac{y_2 - b}{x_2} = \frac{y_3 - b}{x_3} = \text{tg } \alpha = m$$

Ahora bien: estas relaciones se cumplen para cualquier punto de MN; luego, podemos generalizar suprimiendo subíndices:

$$\frac{y - b}{x} = m \quad \text{de donde} \quad \boxed{y = mx + b}$$

que es la *ecuación general de la recta, en forma explícita.*

La constante m, que determina la dirección de la recta, se llama *coeficiente angular* o *pendiente de la recta;* su valor es el de la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de las x.

La constante b representa el valor de y cuando $x = 0$, y recibe el nombre de *ordenada en el origen.*

CASOS PARTICULARES. — 1.° Si $b = 0$, la ecuación toma la forma $y = mx$ y representa a una recta que pasa por el origen de coordenadas (figura 26).

2.° Si $m = 0$, la ecuación se convierte en $y = b$, que es la ecuación de una recta paralela al eje de abscisas (fig. 27).

3.° Si x es constante para cualquier valor de y, la ecuación toma la forma $x = a$ y representa a una recta paralela al eje de ordenadas, trazada a la distancia a de dicho eje (fig. 28).

4.° El eje de abscisas tiene por ecuación $x = 0$, y el de ordenadas, $y = 0$.

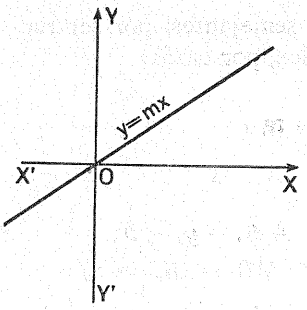

FIG. 26

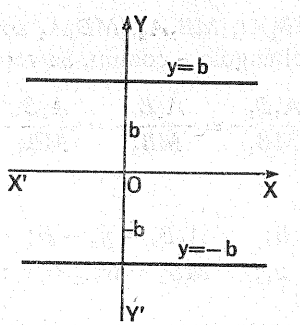

FIG. 27

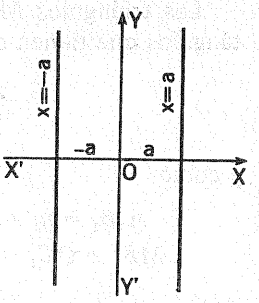

FIG. 28

II. FORMA GENERAL IMPLÍCITA. — Si en la ecuación $y = mx + b$ hacemos

$$m = -\frac{A}{B} \qquad \text{y} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

resulta

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{de donde} \qquad By = -Ax - C$$

o sea,

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

ecuación que denominamos *ecuación general de la recta, en forma implícita.*

III. ECUACIÓN CANÓNICA. — Se llama *ecuación canónica* o *segmentaria* de una recta a la ecuación que está referida a los segmentos que dicha recta determina sobre los ejes de coordenadas.

Sea una recta AB (fig. 29) que corta a los ejes en los puntos A y B, y representemos por a y b los segmentos (con sus signos) determinados por el origen y los puntos de intersección de la recta con los ejes.

Considerando un punto cualquiera de la recta, el M por ejemplo, si designamos por x e y sus coordenadas, por la semejanza de los triángulos MNA y BOA, podremos escribir:

$$\frac{NM}{OB} = \frac{NA}{OA} \qquad \text{es decir} \qquad \frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}$$

de donde se deduce

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

EJEMPLO. — La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados en puntos que distan del origen 2 y -3 será

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

o bien $\quad 3x - 2y - 6 = 0$

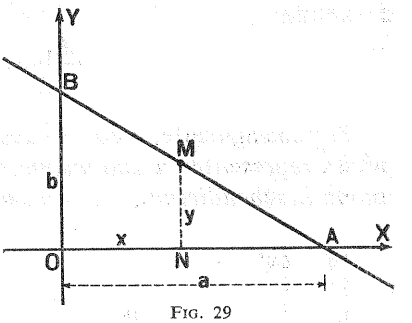

FIG. 29

La recta que corta a los ejes en los puntos $A\,(-\frac{1}{3},\ 0)$ y $B\,(0,\ -\frac{3}{4})$ tendrá por ecuación

$$\frac{x}{-\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{3}{4}} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad 9x + 4y + 3 = 0$$

66. Ecuaciones de una misma recta. — Supongamos que una recta viene representada por dos ecuaciones distintas, en la forma general implícita. Sean éstas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Expresándolas en forma explícita, se obtiene

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \qquad y = -\frac{A}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

pero por tratarse de una misma recta, los coeficientes angulares han de ser iguales, así como las ordenadas en el origen; luego, podemos escribir:

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}; \qquad -\frac{C_1}{B_1} = -\frac{C_2}{B_2}$$

o, multiplicando por -1,

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}; \qquad \frac{C_1}{B_1} = \frac{C_2}{B_2}$$

y si permutamos los medios,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \qquad \frac{C_1}{C_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

de donde

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Por consiguiente, *para que dos ecuaciones lineales dadas en forma implícita representen a una misma recta, sus coeficientes, así como los términos independientes, han de ser proporcionales.*

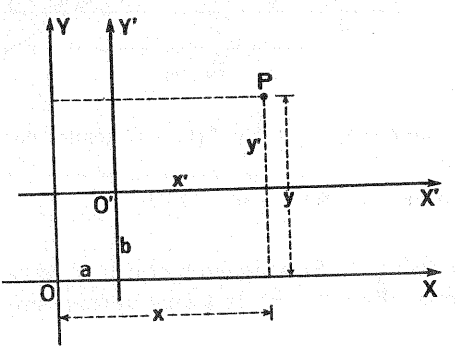

FIG. 30

EJEMPLO. — Las ecuaciones

$$2x + 4y - \tfrac{2}{3} = 0$$
$$3x + 6y - 1 = 0$$

representan a la misma recta, pues

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{-\frac{2}{3}}{-1}$$

67. Cambio de ejes o transformación de coordenadas. — El objeto de estas transformaciones es resolver el problema siguiente:

Dada la ecuación de una línea, referida a un sistema de ejes OX, OY, *hallar la ecuación de dicha línea con respecto a otro sistema* O'X', O'Y', *conociendo la relación que existe entre estos dos sistemas de ejes.*

Dados dos sistemas de ejes, se puede pasar de uno a otro por una traslación, por un giro o por estas dos operaciones juntas.

I. TRASLACIÓN DE LOS EJES COORDENADOS. — Queremos pasar de los ejes *OX, OY* (fig. 30) a los *O'X', O'Y'*, paralelos a los anteriores, trazados por el punto *O'*. Las coordenadas de *O'* respecto del primer sistema son (a, b).

Sea *P* un punto cualquiera del plano; sus coordenadas referidas a los ejes *OX, OY* son (x, y), y con respecto a los ejes *O'X', O'Y'*, (x', y').

De la figura se deduce inmediatamente:

$$x = x' + a; \qquad y = y' + b$$

que son las *fórmulas de la traslación de ejes.*

EJEMPLO. — Si una recta tiene por ecuación $y = \frac{1}{2}x + 1$, ¿cuál será la ecuación de esa misma recta respecto de dos ejes paralelos a los anteriores, trazados por el punto $(-2, 3)$?

Bastará sustituir en la ecuación dada x por $x' - 2$ e y por $y' + 3$. Resulta

$$y' + 3 = \tfrac{1}{2}(x' - 2) + 1 \qquad \text{o su equivalente} \qquad y' = \tfrac{1}{2}x' - 3$$

II. GIRO DE LOS EJES COORDENADOS. — Vamos a pasar de los ejes OX, OY (fig. 31) a los OX', OY', que forman con los primeros un ángulo α.

Sea P un punto cualquiera, y sus coordenadas respecto de ambos sistemas sean (x, y) y (x', y'), respectivamente.

Designemos por r la distancia OP. En el triángulo rectángulo OMP se verifica:

$$x = r\cos(\alpha+\beta) = r\cos\alpha\cos\beta - r\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$
$$y = r\,\text{sen}(\alpha+\beta) = r\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo ONP se tiene:

$$x' = r\cos\beta \qquad y' = r\,\text{sen}\,\beta$$

luego, sustituyendo en las igualdades anteriores, resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\,\alpha \\ y &= x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}}$$

que son las *fórmulas del giro de ejes.*

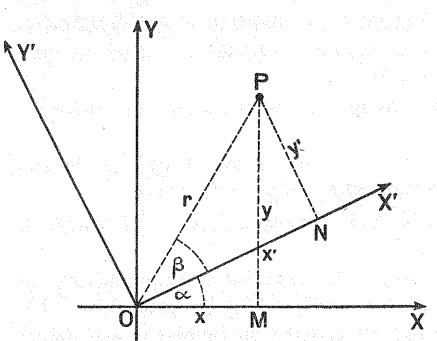

FIG. 31

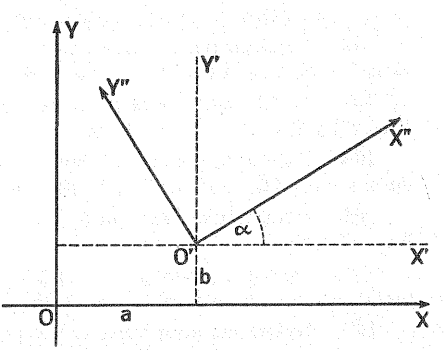

FIG. 32

III. TRASLACIÓN Y GIRO DE LOS EJES COORDENADOS. — Haciendo primero la traslación, se tiene (fig. 32):

$$x = x' + a; \qquad y = y' + b$$

y efectuando ahora el giro con respecto a los ejes $O'X'$, $O'Y'$, resulta:

$$x' = x'' \cos \alpha - y'' \operatorname{sen} \alpha$$
$$y' = x'' \operatorname{sen} \alpha + y'' \cos \alpha$$

Sustituyamos en estas ecuaciones x' e y' por sus valores deducidos de las primeras; tendremos:

$$x - a = x'' \cos \alpha - y'' \operatorname{sen} \alpha$$
$$y - b = x'' \operatorname{sen} \alpha + y'' \cos \alpha$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + x'' \cos \alpha - y'' \operatorname{sen} \alpha \\ y &= b + x'' \operatorname{sen} \alpha + y'' \cos \alpha \end{aligned}}$$

EJERCICIOS

98. Calcular la distancia entre los puntos $A\,(-5,\ 3)$ y $B\,(2,\ -6)$.

99. Los vértices de un triángulo son $A\,(-7,\ 3)$, $B\,(-3,\ -8)$ y $C\,(7,\ -2)$. Hallar el perímetro.

100. ¿Qué clase de triángulo es el que tiene por vértices los puntos $A\,(3,\ 7)$, $B\,(-6,\ -2)$ y $C\,(7,\ 3)$? Trazar la figura. Calcular el área.

101. Los vértices de un cuadrilátero son $A\,(-3,\ -4)$, $B\,(3,\ 5)$, $C\,(9,\ 1)$ y $D\,(3,\ -8)$. ¿Qué clase de cuadrilátero es? Calcular la longitud de sus diagonales.

102. Calcular por la fórmula de Herón el área del triángulo que tiene por vértices los puntos $A\,(2,\ 3)$, $B\,(-1,\ -3)$ y $C\,(3,\ 1)$.

103. Hallar las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo $A\,(7,\ 11)$, $B\,(-7,\ -3)$, $C\,(0,\ 0)$.

104. Las coordenadas del punto medio de un segmento son (1, 0) y las de uno de sus extremos (−5'5, 3'5). Hallar las coordenadas del otro extremo.

105. Averiguar si los puntos $A\,(-3,\ 4)$, $B\,(3,\ -6)$ y $C\,(3/2,\ -7/2)$ están en línea recta.

106. Dados los puntos $A\,(-11,\ 6)$ y $B\,(7,\ -2)$, hallar las coordenadas de un tercer punto, tal que sea: 1.º, $(ABC_1) = 2$; 2.º $(ABC_2) = \frac{3}{4}$; 3.º $(ABC_3) = -0'8$.

107. Hallar las coordenadas del punto C, situado en el segmento que determinan los puntos $A\,(3,\ -2)$ y $B\,(8,\ 3)$, de modo que sea $AC = \frac{1}{3}\,CB$.

108. Determinar las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento limitado por $A\,(-9,\ -4)$ y $B\,(3,\ 8)$.

109. Determinar las coordenadas del punto simétrico del $A\,(3/2,\ -4)$, respecto del punto $(4,\ 0)$.

110. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de abscisa constantemente igual a 5?; ¿y a -2? Escribir las ecuaciones correspondientes a dichos lugares.

111. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de ordenada constantemente igual a -3?; ¿y a 4? Escribir las ecuaciones correspondientes.

112. Escribir en forma explícita la ecuación general de la recta cuyo coeficiente angular es 2 y la ordenada en el origen -7?

113. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene por pendiente $\frac{3}{4}$?

114. Hallar el coeficiente angular y la ordenada en el origen de cada una de las siguientes rectas:

$3x - 2y + 4 = 0$ $\qquad$ $\frac{7}{8}x + \frac{2}{3}y = 8$ $\qquad$ $2(x-6) = 3(4y+1)$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ $\qquad$ $3x + \frac{41}{5} = 7y - 2$ $\qquad$ $\frac{7}{9} = \frac{x+4}{y-3}$

115. Un punto M se mueve de tal manera que la diferencia entre los cuadrados de sus distancias a los puntos $P\,(2,\ 3)$ y $Q\,(5,\ 7)$ es constantemente igual a 5. ¿Cuál es la ecuación del lugar geométrico de M?

116. Representar gráficamente las rectas cuyas ecuaciones son:

$y = 3x$; $\quad y = 2x - 5$; $\quad y = 4$; $\quad y = -7$; $\quad y = 0$; $\quad x = -3$; $\quad x = 0$

117. Construir el triángulo cuyos lados son:

$2x - 3y + 6 = 0$; $\qquad 3x + 4y + 12 = 0$; $\qquad 6x - 4y - 24 = 0$

118. Expresar en forma canónica la ecuación de la recta que corta a los ejes en los puntos $(-3,\ 0)$ y $(0,\ 5)$.

119. Un punto P tiene de coordenadas $(4,\ -3)$. ¿Qué coordenadas tendrá si se traslada paralelamente el sistema de ejes, de modo que el origen sea el punto $(-1,\ 3)$?

120. ¿Qué ecuación tendrá la recta $y = 2x - 7$ si trasladamos el origen al punto $(3,\ -1)$, quedando los nuevos ejes paralelos a los primeros?

121. Dado un punto P de coordenadas $(2,\ 3)$, ¿cuáles serán sus coordenadas si los ejes giran 45°?

122. Las coordenadas de un punto en un sistema de ejes rectangulares son $(-1,\ 3)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de ese punto si el origen se traslada al punto $(2,\ -2)$ y los ejes giran 30°?

123. Hallar la transformada de la ecuación de la recta paralela al eje de las x, de ecuación $y = 3$, respecto de unos nuevos ejes que forman 60° con los anteriores.

124. ¿Qué ecuación tendrá la recta $x\sqrt{2} - y + 3\sqrt{2} = 0$ cuando se trasladen los ejes al punto $(4,\ 0)$ y se haga un giro de 45°?

9. Incidencia de rectas

68. Incidencia de línea y punto. — Una línea y un punto se dice que son *incidentes* cuando la línea pasa por el punto, o el punto pertenece a la línea.

La condición para que un punto pertenezca a una línea, dada por su ecuación, es que las coordenadas del punto satisfagan la ecuación de la línea.

EJEMPLO. — El punto $(-1, 4)$ pertenece a la recta $2x - 3y + 14 = 0$, puesto que se verifica que

$$2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 + 14 = 0$$

69. Rectas que pasan por un punto. — Dado un punto $P(x_1, y_1)$ (figura 33), vamos a hallar la expresión general de las infinitas rectas que pasan por él.

La ecuación general de la recta, en forma explícita, es $y = mx + b$. Para toda recta que pase por el punto $P(x_1, y_1)$ se tendrá que verificar $y_1 = mx_1 + b$. Restando estas dos igualdades, se elimina b y queda como constante indeterminada el coeficiente angular m; es decir, resulta:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

que es la ecuación de cualquier recta que pase por el punto (x_1, y_1); en cada caso, el valor de m representa la inclinación de la recta respecto del eje de abscisas.

EJEMPLO. — La ecuación de las rectas que pasan por el punto (2, 3) es

$$y - 3 = m(x - 2)$$

y la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -5)$ y tiene por pendiente 2 es

$$y + 5 = 2(x - 1) \quad \text{o su equivalente} \quad y = 2x - 7$$

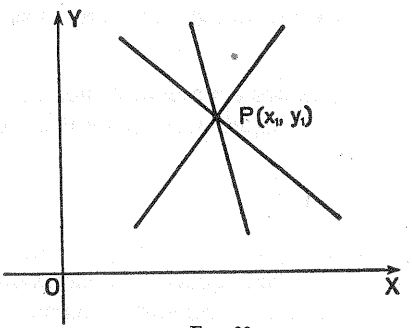

FIG. 33

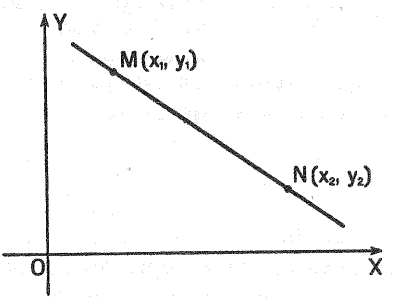

FIG. 34

70. Recta que pasa por dos puntos. — Sean los puntos $M(x_1, y_1)$ y $N(x_2, y_2)$, figura 34. La recta que buscamos, por pasar por el punto M, tendrá por ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Pero el segundo punto, N, se encuentra también en dicha recta; luego, ha de ser

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \text{de donde} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por consiguiente, la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados será

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

CASOS PARTICULARES. — 1.° Si es $y_2 - y_1 = 0$, resultará para m el valor 0 y la recta buscada será $y = y_1$, es decir, se tratará de una paralela al eje de las x.

2.° Si es $x_2 - x_1 = 0$, no podrá hallarse el coeficiente angular m. Pero al ser $x_2 = x_1$, la recta en cuestión será paralela al eje de las y, y tendrá por ecuación $x = x_1$.

EJEMPLO. — La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-1, 1)$ es

$$y + 3 = \frac{1 + 3}{-1 - 2}(x - 2) \quad \text{o su equivalente} \quad 4x + 3y + 1 = 0$$

El resultado hubiera sido el mismo de haber considerado las coordenadas de B como (x_1, y_1) y las de A como (x_2, y_2).

71. Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: discusión. — Supongamos un sistema de dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\}$$

Su solución ha de satisfacer a las dos ecuaciones. Ahora bien: si construímos las rectas representativas de dichas ecuaciones, las coordenadas del punto de intersección habrán de satisfacer a las repetidas ecuaciones, puesto que el punto pertenece a ambas rectas.

Por consiguiente, *para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, bastará construir las rectas correspondientes a dichas ecuaciones; las coordenadas del punto de intersección serán la solución del sistema.*

Pueden presentarse tres casos:

1.° Que las rectas se corten (fig. 35), en cuyo caso el sistema será *determinado.*

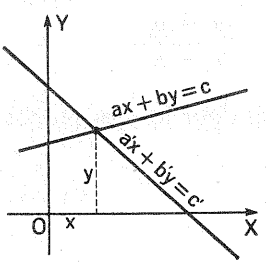

FIG. 35

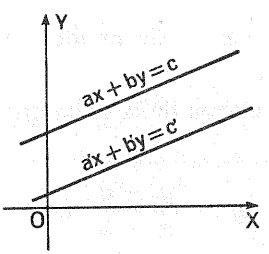

FIG. 36

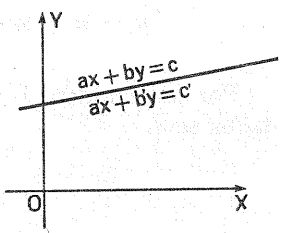

FIG. 37

2.° Que las rectas sean paralelas (fig. 36), es decir, que no tengan ningún punto común, por lo que el sistema será *incompatible.*

3.° Que las dos ecuaciones representen la misma recta (fig. 37), es decir, que existan infinitas soluciones comunes, en cuyo caso el sistema será *indeterminado.*

INTERPRETACIÓN ANALÍTICA. — Para obtener analíticamente las coordenadas del punto de intersección de las rectas, resolvamos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\}$$

Empleemos, por ejemplo, el método de reducción. Para ello, multipliquemos por b' a la primera ecuación y por b a la segunda; restando luego las igualdades que resulten, quedará eliminada la incógnita y. Despejando después x, se obtiene

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

Multiplicando la primera ecuación por a' y la segunda por a, y restando luego, se obtiene una ecuación en y, de la que resulta

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Examinemos los casos que se pueden presentar, según el valor que tengan los términos de las expresiones que dan x e y.

1) $ab' - ba' \neq 0$. En este caso, cualquiera que sea el valor de los numeradores, los valores de x e y son finitos y determinados, lo que quiere decir que *las rectas se cortan en un punto y el sistema es, por tanto, determinado.*

2) $ab' - ba' = 0$; $cb' - bc' \neq 0$; $ac' - ca' \neq 0$. Cuando se dan estas condiciones, x e y toman un valor infinito, lo que significa que las rectas no se cortan, o que se cortan en el infinito, o sea, *son paralelas.* El sistema en este caso se dice que es *incompatible,* es decir, no tiene solución.

De $ab' - ba' = 0$ se deduce $ab' = ba'$ y de aquí, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

Por consiguiente, *un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es incompatible cuando los coeficientes de las incógnitas son proporcionales.*

3) $ab' - ba' = 0$; $cb' - bc' = 0$; $ac' - ca' = 0$. Supuesto esto, se obtienen para x e y los valores indeterminados

$$x = \frac{0}{0} \qquad y = \frac{0}{0}$$

lo que significa que el sistema tiene infinitas soluciones o que es *indeterminado;* las dos ecuaciones representan en este caso a la *misma recta.*

De $ab' - ba' = 0$; $cb' - bc' = 0$; $ac' - ca' = 0$

se deduce

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}; \qquad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

y de aquí,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Es decir: *un sistema de ecuaciones lineales es indeterminado si los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes son proporcionales.*

72. Combinación lineal de dos ecuaciones. — Sean dos ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

cada una de las cuales representa a una recta. Si multiplicamos a una de ellas, la segunda por ejemplo, por un número cualquiera k, y el resultado lo sumamos miembro a miembro con la primera, obtendremos una nueva ecuación

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0 \qquad [2]$$

que recibe el nombre de *combinación lineal* de las dos primeras.

Vamos a demostrar que para todo valor de k, la ecuación [2] representa a una recta que pasa por el punto de intersección de las rectas correspondientes a las ecuaciones de que es combinación lineal.

En efecto: Ante todo, la ecuación [2], por ser lineal en x e y, representa a una recta. Por otra parte, si (x_1, y_1) es el punto de intersección de las rectas [1], se cumplirá que

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \qquad \text{y} \qquad a'x_1 + b'y_1 + c' = 0$$

de donde se deduce

$$ax_1 + by_1 + c + k(a'x_1 + b'y_1 + c') = 0$$

Pero esta identidad no es más que la ecuación [2], en la que se ha sustituído x por x_1 e y por y_1; luego, queda probado que el punto (x_1, y_1) pertenece a todas las rectas representadas por la combinación lineal

$$\boxed{ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0}$$

De esta relación se dice que es la *ecuación del haz de rectas* concurrentes con las dos primeras, y a partir de ella podemos obtener una cualquiera de las rectas del haz, con sólo dar a k valores determinados.

EJEMPLO. — Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + 5y - 1 = 0$ y $3x - 4y - 13 = 0$ y por el punto $(5, -2)$.

El haz de rectas que pasan por el punto de intersección de las dos dadas, tendrá por ecuación

$$2x + 5y - 1 + k(3x - 4y - 13) = 0$$

Si de entre estas rectas queremos determinar la que pasa por el punto $(5, -2)$, sustituiremos x por 5 e y por -2, con lo cual resultará

$$10 - 10 - 1 + k(15 + 8 - 13) = 0 \quad \text{de donde} \quad k = \frac{1}{10}$$

Por tanto, la recta buscada será

$$2x + 5y - 1 + \frac{1}{10}(3x - 4y - 13) = 0 \quad \text{o su equivalente} \quad x + 2y - 1 = 0$$

EJERCICIOS

125. Hallar la ecuación general de las rectas que pasan por cada uno de los puntos siguientes:

$$P_1(2, -1);\ P_2(0, 3);\ P_3(1, 0);\ P_4(3, -6);\ P_5(0, 0)$$

126. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) y tiene una inclinación de 45°.

127. Hallar la ecuación de la recta que tiene -3 de coeficiente angular y su ordenada en el origen es igual a $-\frac{2}{3}$.

128. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $\left(\frac{5}{3}, -7\right)$ y tiene de pendiente 0?

129. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y tiene igual coeficiente angular que la recta $x + 4y - 5 = 0$.

130. Demostrar que todas las rectas cuyas ecuaciones se ajustan a la forma $y = mx + m$ pasan por un mismo punto. ¿Cuáles son las coordenadas de ese punto?

131. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(3, -2)$?

132. Hallar la ecuación de la recta que corta a los ejes X e Y a distancias 2 y 5 del origen, respectivamente.

133. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 5), sabiendo que este punto equidista de las intersecciones de la recta con los ejes.

134. Hallar la ecuación de las rectas determinadas por los pares de puntos siguientes:

a) (1, 2) y (3, 5)
b) $(-2, 3)$ y $(4, -2)$
c) $(-2, 3)$ y $(-2, 4)$
d) (0, 4) y (0, 5)
e) (2, 3) y (4, 3)
f) (3, 0) y $(-2, 0)$

135. Hallar las ecuaciones de los lados del triángulo cuyos vértices son $A\,(3, 5)$, $B\,(-1, 2)$ y $C\,(2, -6)$.

136. Una recta pasa por los puntos $(3, -5)$ y $(-2, c)$. Calcular c, sabiendo que la pendiente de la recta es 3.

137. Los vértices de un cuadrilátero son $A\,(-1, -1)$, $B\,(3, 0)$, $C\,(4, 3)$ y $D\,(0, 2)$. Obtener las ecuaciones de las diagonales y deducir la clase de cuadrilátero de que se trata por la comparación de las pendientes de sus lados.

138. ¿Pertenece el punto $\left(3, \frac{9}{2}\right)$ a la recta que pasa por los puntos $(5, 7)$ y $(2, 3)$?

139. Resolver gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x - \tfrac{1}{2}y &= 1 \\ x + \tfrac{1}{2}y &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ y + 3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}y &= -1 \\ 2x - y &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

140. Dadas las rectas $ax + 2y + 4 = 0$, $10x + by - 2 = 0$, determinar a y b para que dichas rectas se corten en el punto $A\,(2, 3)$.

141. Los vértices de un triángulo son $A\,(-4, -3)$, $B\,(6, 1)$ y $C\,(4, 11)$. Hallar las ecuaciones de las medianas.

142. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son

$$3x + 2y - 4 = 0, \qquad x - y - 8 = 0, \qquad 4x + y - 2 = 0$$

Calcular las coordenadas del punto en que se cortan las medianas.

143. Hallar el valor del parámetro (*) a para que las rectas

$$3x - 2y = 6, \qquad 3x + 4y = 0, \qquad y = ax + 1$$

sean concurrentes, y determinar el punto de intersección.

144. Dado el triángulo $A\,(0, 0)$, $B\,(5, 2)$, $C\,(-2, 5)$, hallar su naturaleza y comprobar que sus medianas son rectas concurrentes.

145. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\,(-2, 0)$ y por el de intersección de las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x - y + 2 = 0$.

(*) *Parámetro* es una constante a la que se le pueden asignar diversos valores numéricos.

10. Angulos y distancias

73. Ángulo de dos rectas. — Sean las rectas r_1 y r_2 (fig. 38). Trazando por el origen sendas paralelas r'_1 y r'_2 vemos que el ángulo φ formado por éstas es igual al de aquéllas, verificándose

$$\varphi = \alpha - \beta$$

Aplicando una conocida relación trigonométrica, tendremos:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Supongamos que las ecuaciones de las rectas r_1 y r_2 son

$$y = m_1 x + b_1$$
$$y = m_2 x + b_2$$

Como

$$\operatorname{tg} \alpha = m_1 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \beta = m_2$$

sustituyendo estos valores, resulta

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

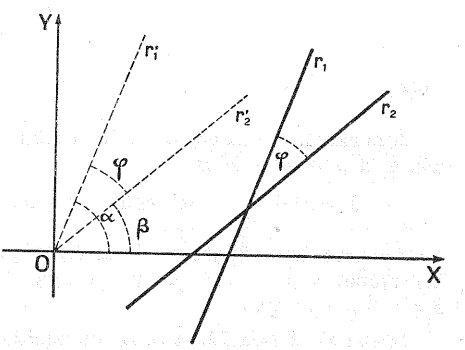

FIG. 38

de donde fácilmente se deduce el valor de φ.

Si intercambiamos m_1 y m_2 en la fórmula anterior, se obtiene la tangente del ángulo suplementario de φ. En general, pondremos en primer lugar, en el numerador, la pendiente de la recta que forma mayor ángulo con *OX*, tal como hemos procedido al deducir la fórmula.

EJEMPLO. — Hallar el ángulo formado por las rectas

$$x - y + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 4y - 9 = 0$$

Como $m_1 = -\dfrac{A_1}{B_2} = 1$ y $m_2 = -\dfrac{A_2}{B_2} = -\dfrac{1}{4}$, tendremos

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{3}$$

que mediante las tablas trigonométricas nos da $\varphi = 59° \; 2' \; 10''$.

74. Condición de paralelismo. — El ángulo formado por dos rectas paralelas es igual a cero. Por tanto, como $\operatorname{tg} 0° = 0$, ha de ser

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0$$

lo cual sucede cuando

$$m_1 - m_2 = 0$$

o lo que es igual, cuando

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

luego: *dos rectas paralelas tienen sus coeficientes angulares iguales.*

EJEMPLO 1.º — La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ y es paralela a la $y = 5x - 7$ es

$y - 3 = 5(x+2)$ es decir $y = 5x + 13$ o bien $5x - y + 13 = 0$

EJEMPLO 2.º — Ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $y = 2x - 3$ e $y = x + 2$, y es paralela a la recta de ecuación $5x + 2y - 1 = 0$.

Según el párrafo 72, la ecuación pedida ha de ser de la forma

$$2x - y - 3 + k(x - y + 2) = 0$$

o sea

$$(k+2)x - (k+1)y - 3 + 2k = 0 \qquad [1]$$

y como el coeficiente angular de esta,

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{k+2}{k+1}$$

debe ser igual al de la recta dada, tendremos

$$\frac{k+2}{k+1} = -\frac{5}{2} \qquad \text{de donde} \qquad k = -\frac{9}{7}$$

y llevando este valor a [1], resulta

$$5x + 2y - 39 = 0$$

que es la ecuación que buscábamos.

75. Condición de perpendicularidad. — El ángulo formado por dos rectas perpendiculares es igual a 90°; y como $\operatorname{tg} 90° = \infty$, se ha de verificar

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \infty$$

Esto sucede cuando

$$1 + m_1 m_2 = 0$$

de donde

$$m_1 m_2 = -1$$

o sea

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

Es decir: *si dos rectas son perpendiculares, el coeficiente angular de una de ellas es igual al recíproco del coeficiente angular de la otra, con el signo cambiado.*

EJEMPLO 1.º — La ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es perpendicular a la recta $y = 2x + 5$, es

$$y + 3 = -\tfrac{1}{2}(x-2) \qquad \text{o sea} \qquad x + 2y + 4 = 0$$

EJEMPLO 2.º — La recta que pasa por el punto $(-1, 2)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 1 = 0$, es

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x+1) \qquad \text{o sea} \qquad 3x + 2y - 1 = 0$$

76. Ecuación normal de una recta. — *Es la ecuación de una recta cuando está expresada en función de la distancia* p *del origen a la recta, y del ángulo* α *formado por* p *y el eje* OX.

Supongamos la recta AB (fig. 39). Si a y b son los segmentos que determina en los ejes, su ecuación segmentaria (65, III) es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Tracemos por el origen una perpendicular a la recta, y designemos por p al segmento OC de dicha perpendicular.

En los triángulos rectángulos OCA y OCB se verifica:

$$a = \frac{p}{\cos \alpha}; \qquad b = \frac{p}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{p}{\operatorname{sen} \alpha}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior a y b por estos valores, resulta:

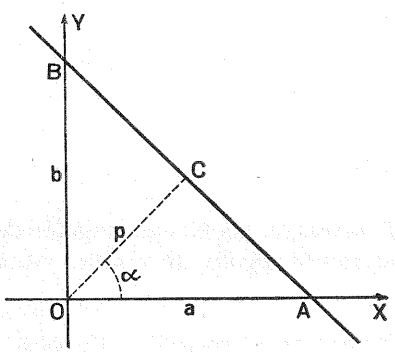

FIG. 39

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos \alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\operatorname{sen} \alpha}} = 1$$

$$\frac{x \cos \alpha}{p} + \frac{y \operatorname{sen} \alpha}{p} = 1$$

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = p$$

o su equivalente

$$\boxed{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0}$$

que es la llamada *ecuación normal de la recta.*

Si la recta viene dada por su ecuación general

$$Ax + By + C = 0$$

y queremos pasar a la forma normal

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0$$

no tenemos más que expresar que las dos ecuaciones representan a la misma recta, o sea, expresaremos la proporcionalidad de sus coeficientes (66),

$$\frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{B} = \frac{-p}{C}$$

Elevando al cuadrado estas igualdades, obtenemos

$$\frac{\cos^2 \alpha}{A^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{B^2} = \frac{p^2}{C^2}$$

y aplicando una conocida propiedad de las proporciones, resulta

$$\frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{A^2 + B^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{A^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{B^2} = \frac{p^2}{C^2}$$

y extrayendo la raíz cuadrada, después de sustituir $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ por 1,

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{B} = \frac{p}{C}$$

de donde se deduce

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \qquad p = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ (*)}$$

valores que, sustituídos en la ecuación normal, nos dan

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{Bx}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

o su equivalente

$$\boxed{\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0}$$

EJEMPLO. — Escribir en forma normal la ecuación de la recta $3x - 2y + 4 = 0$. Se tiene:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \pm\sqrt{13}$$

(*) Como p representa la distancia de la recta al origen, en el radical del denominador se tomará el mismo signo que lleve C para que p sea positivo.

y como el término independiente es positivo, dividiremos por $+\sqrt{13}$, o sea resulta

$$\frac{3}{\sqrt{13}}x - \frac{2}{\sqrt{13}}y + \frac{4}{\sqrt{13}} = 0$$

El significado de los coeficientes de esta ecuación es el deducido anteriormente, es decir:

$$\frac{3}{\sqrt{13}} = \cos\alpha; \qquad -\frac{2}{\sqrt{13}} = \operatorname{sen}\alpha; \qquad \frac{4}{\sqrt{13}} = p$$

Las dos primeras igualdades nos dicen que el ángulo α termina en el cuarto cuadrante, puesto que el seno es negativo y el coseno positivo. Por consiguiente, efectuando el cálculo por logaritmos, se obtiene $\alpha = -33° 41' 24''$, y la ecuación pedida será

$$x\cos(-33° 41' 24'') + y\operatorname{sen}(-33° 41' 24'') - \frac{4}{\sqrt{13}} = 0$$

77. Distancia de un punto a una recta. — Acabamos de ver que en la ecuación normal de una recta, el término independiente p es precisamente la distancia del origen a esa recta. Por tanto, si queremos hallar la distancia d (fig. 40) de un punto cualquiera $P(x_1, y_1)$ a una recta AB de ecuación normal

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0$$

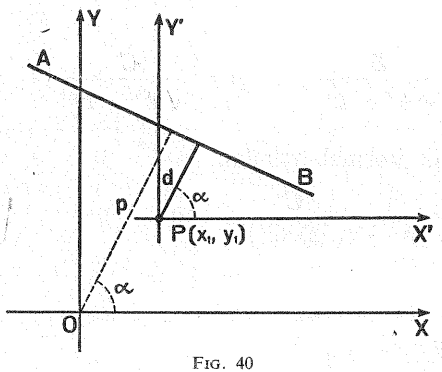

FIG. 40

bastará efectuar una traslación de ejes al punto $P(x_1, y_1)$ y hallar el término independiente de la ecuación transformada de AB.

Las fórmulas de traslación de ejes al punto $P(x_1, y_1)$ son (67, I)

$$x = x' + x_1 \qquad y = y' + y_1$$

luego, la ecuación de la recta AB respecto de los ejes $X'Y'$ será

$$(x' + x_1)\cos\alpha + (y' + y_1)\operatorname{sen}\alpha - p = 0$$

es decir

$$x'\cos\alpha + y'\operatorname{sen}\alpha + (x_1\cos\alpha + y_1\operatorname{sen}\alpha - p) = 0$$

cuyo término independiente, en valor absoluto, es por tanto la distancia d del punto (x_1, y_1) a la recta AB, o sea,

$$d = | x_1 \cos \alpha + y_1 \operatorname{sen} \alpha - p |$$

lo que nos dice que, *la distancia de un punto a una recta es el valor absoluto que toma el primer miembro de su ecuación normal cuando se sustituyen las variables* x *e* y *por las coordenadas del punto.*

Si la recta viene dada por su ecuación general

$$Ax + By + C = 0$$

bastará dividir por $\sqrt{A^2 + B^2}$ para que resulte la forma normal (76):

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Por tanto, la distancia del punto (x_1, y_1) a esa recta se hallará sustituyendo en el primer miembro de esta última ecuación las variables x e y por las coordenadas x_1, y_1, y tomando el valor absoluto. Es decir, tendremos:

$$\boxed{d = \frac{| Ax_1 + By_1 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

EJEMPLO. — La distancia del punto $(3, -5)$ a la recta $4x + 3y - 1 = 0$, será

$$d = \frac{| 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) - 1 |}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

78. Bisectrices de los ángulos de dos rectas. — Supongamos que dos rectas se cortan y vienen dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned}$$

Para determinar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman, consideremos un punto (x_1, y_1) en una de esas bisectrices. Las distancias de dicho punto a las rectas dadas serán, respectivamente,

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{y} \quad \frac{A'x_1 + B'y_1 + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Como todo punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo, podremos escribir

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x_1 + B'y_1 + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Pero el punto considerado en la bisectriz es uno cualquiera; como para todos se verifica la relación anterior, tendremos que la ecuación de la bisectriz será

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Los radicales que forman los denominadores pueden tomarse con igual signo o con signo contrario; en este segundo caso obtendríamos la otra bisectriz, es decir,

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Reuniendo ambas ecuaciones en una misma expresión, tendremos

$$\boxed{\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}}$$

EJEMPLO. — Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas,

$$6x + 8y - 5 = 0 \qquad \text{y} \qquad 5x + 12y + 9 = 0$$

son

$$\frac{6x + 8y - 5}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{5x + 12y + 9}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{6x + 8y - 5}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = -\frac{5x + 12y + 9}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

o bien, efectuando operaciones,

$$28x - 16y - 155 = 0 \qquad \text{y} \qquad 128x + 224y + 25 = 0$$

Obsérvese que estas dos rectas son perpendiculares, de acuerdo con lo que enseña la Geometría. En efecto: en ellas se verifica la condición de perpendicularidad $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, puesto que

$$m_1 = \frac{28}{16} = \frac{7}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = -\frac{128}{224} = -\frac{4}{7} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{7}{4} = -\frac{1}{-\frac{4}{7}}$$

79. Área de un triángulo. — Vamos a determinar el área de un triángulo cuyos vértices son puntos de coordenadas conocidas.

Sea el triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$. Su área, como sabemos, es igual a la mitad del producto de la base por la altura, es decir (fig. 41),

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2} BC \cdot h$$

La base BC es la distancia entre los puntos $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$; por tanto,

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

La altura h es la distancia del punto $A(x_1, y_1)$ a la recta BC. Como esta recta BC pasa por los puntos (x_2, y_2) y (x_3, y_3), tendrá por ecuación (70)

$$y - y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_2)$$

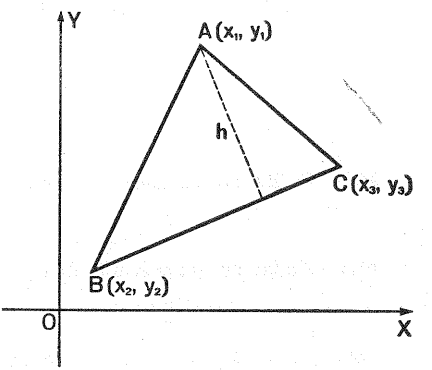

FIG. 41

o bien, después de operar y reducir el segundo miembro a cero

$$(y_3 - y_2)x - (x_3 - x_2)y + (x_3 y_2 - x_2 y_3) = 0 \qquad [1]$$

Por consiguiente, la distancia del punto (x_1, y_1) a la recta anterior, será (77):

$$h = \frac{|(y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (x_3 y_2 - x_2 y_3)|}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

Observando que el denominador de h es igual a BC, vemos que al sustituir en $S = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot h$, quedará

$$\boxed{\text{Área} = \tfrac{1}{2}\,|(y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (x_3 y_2 - x_2 y_3)|}$$

Es decir que, *para hallar el área de un triángulo, se sustituyen las variables* x *e* y *por las coordenadas de un vértice cualquiera en el primer*

miembro de la recta que pasa por los otros dos, puesta en la forma [1]. *La mitad del valor absoluto del número así obtenido será el área del triángulo.*

EJEMPLO. – Calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A\,(2, -1)$, $B\,(-1, 4)$ y $C\,(-5, -6)$.

Aplicando la fórmula, resulta

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}\,|\,(-6-4)\,2 - (-5+1)\,(-1) + (-5)\,4 - (-1)\,(-6)\,| = 25$$

EJERCICIOS

146. Hallar la tangente del ángulo que forman las rectas

$$3x - 2y = 1 \qquad \text{y} \qquad x + y = 4$$

147. Hallar en grados, minutos y segundos el ángulo formado por las rectas

$$y = \tfrac{2}{3}x + 1 \qquad \text{y} \qquad 3x + 2y - 6 = 0$$

148. La recta $3x + 4y = 12$ corta a la determinada por los puntos $(-7, 2)$ y $(-1, 10)$ en el punto P. Calcular las coordenadas de P y el ángulo que forman.

149. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y es paralela a la recta determinada por los puntos $(0, 5)$ y $(2, 0)$.

150. Hallar los coeficientes m y n de las rectas $3x - my = 2$ y $nx + 4y = 5$, sabiendo que son paralelas y que la primera pasa por el punto $(2, -2)$.

151. Los puntos $A\,(3, 1)$, $B\,(2, 3)$, $C\,(7, 2)$ son vértices de un paralelogramo. Calcular las coordenadas del cuarto vértice D, opuesto al B.

152. Hallar la ecuación de la paralela a la bisectriz del 2.º y 4.º cuadrantes y que corta al semieje OY' en el punto de ordenada -5.

153. Dos vértices consecutivos de un rombo son el origen de coordenadas y el punto $(3, 4)$. Otro vértice está situado en el semieje de ordenadas positivo. Hallar las coordenadas del tercero y cuarto vértices y el área del rombo.

154. Hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a la recta $5x + 2y = 58$.

155. Dados los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$, hallar la ecuación de la recta que determinan y la de la recta que siendo perpendicular a ésta pasa por el punto $(2, -1)$.

156. Las rectas $ax - y = 4$ y $x + b = y$ son perpendiculares y cortan al eje de abscisas en dos puntos distantes 5 unidades. Hallar a y b.

157. Dadas las rectas de ecuaciones $\frac{3x - y}{2} = 6$ e $y - 4 = \frac{3x - 6}{\frac{1}{2}}$, calcular sus coeficientes angulares y sus ordenadas en el origen, y decir si son paralelas o perpendiculares.

158. Hallar las coordenadas del punto de la recta $5x - y = -17$, que equidista de los puntos $A\,(3, 10)$ y $B\,(7, 2)$.

159. En el triángulo de vértices $A\,(3, 0)$, $B\,(1, 2)$, $C\,(-1, 1)$, hallar el punto de intersección de la altura que parte de A con la mediana que parte de B.

160. Dadas las rectas de ecuaciones $4x + 2y - 8 = 0$ y $2x - 4y = 8$, determinar la ecuación de la recta que pasa por su punto de intersección y por el origen de coordenadas, y justificar que las dos primeras rectas son perpendiculares.

161. Determinar el valor de a para que las rectas

$$ax + (a-1)y - 2(a+2) = 0 \qquad \text{y} \qquad 3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$$

sean: 1.º Paralelas. 2.º Perpendiculares.

162. Hallar la ecuación normal de la recta $3x - y + 2 = 0$.

163. Hallar la ecuación normal de la recta que corta al eje de las x en el punto de abscisa 3 y forma con él un ángulo de 60°.

164. La recta $3x + 4y - c = 0$ dista del punto $A\,(0, 4)$ una longitud de 3 dm. Determinar el valor de c y hallar la ecuación normal de dicha recta.

165. Determinar m para que las rectas $mx + y = 12$ y $4x - 3y = m + 1$, sean paralelas, y hallar su distancia.

166. Hallar la distancia del punto $(-1, 1)$ a la recta que corta a los ejes X e Y a las distancias 3 y 4 del origen.

167. Calcular la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por el punto (3, 0) y es perpendicular a la $x - 2y + 3 = 0$.

168. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $3x - y = 1$ y $2x + y = 0$.

169. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman la recta $5x + 12y - 60 = 0$ con el eje de ordenadas.

170. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A\,(0, 6)$, $B\,(4, 0)$ y $C\,(6, 4)$.

171. Calcular el área del cuadrilátero limitado por los ejes coordenados y el par de rectas: $3x + 4y = 12$; $6x + 8y = 12$.

172. Calcular el área del triángulo cuyos lados están en el eje X y en las rectas $x = y$ y $3x + 5y = 24$.

173. Calcular el área de un triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto $(-2, 3)$ y el punto de la región negativa del eje Y que dista 4 unidades del origen.

174. La recta de coeficiente angular 3, y que pasa por el punto $P(2, 3)$, corta al eje de abscisas en el punto A y al eje de ordenadas en B. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos A y B.

175. Hallar la ecuación de la altura que parte del vértice situado en el origen de coordenadas del triángulo cuyos otros dos vértices son $A(4, 3)$ y $B(-1, 7)$. Calcular luego el área del triángulo.

176. Dadas las coordenadas de los tres vértices de un triángulo $(2, 2)$, $(-1, 1)$, $(-1, 4)$, decir qué clase de triángulo es y hallar su área.

177. Comprobar que el triángulo $A(0, 4)$, $B(3, 0)$, $C\left(\frac{3 + 4\sqrt{3}}{2}, \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}\right)$ es equilátero. Calcular su altura y el radio del círculo circunscrito.

178. Calcular m para que las rectas $3x + my = 7$ y $5x - 3y = 0$ sean perpendiculares, y hallar el área del triángulo que determinan con el eje OY.

179. Dados los puntos $A(2, 1)$, $B(-3, 5)$ y $C(4, m)$, calcular el valor que ha de tener m para que el triángulo ABC tenga de área 6.

180. Dados los puntos $(8, 0)$ y $(4, 12)$, encontrar sobre $Y'Y$ otro que equidiste de los dos. Hallar el área del triángulo que los dos puntos dados determinan con el origen de coordenadas.

181. Conocidos los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ y $C(2, 3)$, que son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, hallar: 1.º Las coordenadas del cuarto vértice. 2.º La clase de paralelogramo. 3.º Su área.

11. Derivada de una función

80. Concepto de derivada. — Recordemos del curso anterior cómo se llega al concepto importantísimo de derivada de una función.

Supongamos una función $y = f(x)$, definida en un intervalo (a, b), y sean x_1 y $x_1 + \Delta x$ dos valores próximos de la variable independiente, a los cuales corresponden en la función los dos siguientes:

$$y_1 = f(x_1) \qquad \text{e} \qquad y_1 + \Delta y = f(x_1 + \Delta x)$$

La diferencia

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

es lo que hemos llamado *incremento de la función* correspondiente al *incremento* Δx *de la variable.*

Formemos la *razón de incrementos,*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

y hallemos su límite cuando Δx tiende a cero. Este límite existe en la mayoría de los casos, y recibe el nombre de *derivada de la función* en el punto considerado.

DEFINICIÓN. — *Derivada de una función en un punto es el límite de la razón de incrementos cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.*

Dada una función $y = f(x)$ que tenga derivada en los diversos puntos de un intervalo, a la función que hace corresponder a cada valor de x el valor de la derivada en ese punto de la función dada, se le llama *función derivada* de $y = f(x)$.

Las funciones que tienen función derivada se llaman *derivables,* y la operación por la cual se halla la derivada recibe el nombre de *derivación.*

La derivada de una función $y = f(x)$ se representa por y' o $f'(x)$; de acuerdo con esto y según la anterior definición, pondremos:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{o bien} \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

También se usan corrientemente las siguientes notaciones:

$$Dy; \qquad \frac{dy}{dx}; \qquad Df(x); \qquad \frac{d}{dx} f(x)$$

que se leen, respectivamente: «derivada de y»; «derivada de y respecto de x»; derivada de la función f de x», y «derivada respecto de x de la función f de x».

Se emplea la notación $Df(x)$ o la $\frac{d}{dx} f(x)$ cuando se quiere indicar claramente la función que se ha derivado. Por ejemplo, si se trata de la función $y = x^2 + 2x - 5$, pondremos

$$D(x^2+2x-5) \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}(x^2+2x-5)$$

Cuando interese destacar la variable con relación a la cual se ha derivado, convendrá emplear una de las notaciones $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d}{dx} f(x)$.

81. Propiedad importante. — *Si una función* f(x) *tiene derivada en un punto* $x = x_1$, *es continua en él.*

En efecto: de la definición de límite, por ser

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{se deduce} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$$

siendo ε un infinitésimo, que tiende a cero al mismo tiempo que Δx.

De la última expresión obtenemos

$$\Delta y = (y' + \varepsilon)\,\Delta x$$

y, por consiguiente, al ser Δx un infinitésimo también lo será Δy.

La proposición recíproca de la propiedad anterior no es siempre cierta, pues una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él. Para la continuidad sólo se necesita que Δx e Δy tiendan simultáneamente a cero, mientras que la derivabilidad exige además que el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tenga un límite.

82. Interpretación geométrica de la derivada. — Supongamos una función $y = f(x)$ cuya representación gráfica sea la curva PA (fig. 42). El cociente incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{CA}{PC}$$

viene representado por la tangente trigonométrica del ángulo α', formado por el sentido positivo de la cuerda PA (es decir, el sentido correspondiente a las x crecientes) con el sentido positivo del eje de abscisas. En efecto: en el triángulo rectángulo PCA se verifica

$$\frac{CA}{PC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha'$$

Al tender Δx a cero, $x_1 + \Delta x$ tiende a x_1, el punto A tiende a P, y la cuerda PA tiende a confundirse con la tangente a la curva en el punto P, ya que la tangente es la posición límite de la secante PA cuando el punto A

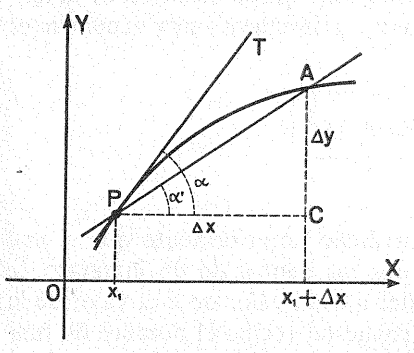

FIG. 42

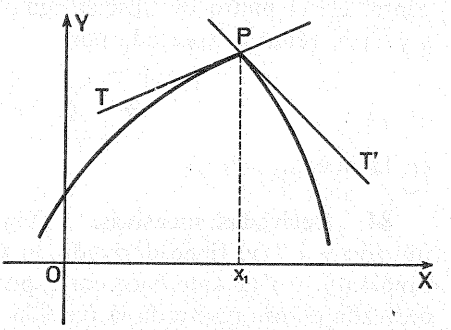

FIG. 43

tiende a P, deslizándose por la curva. Como consecuencia, el ángulo α' se transforma en el α, y tendremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha$$

es decir,

$$\boxed{f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha = \textit{pendiente de la tangente en } \mathrm{P}}$$

Luego, *la derivada de una función en un punto equivale al valor de la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica a la curva en dicho punto, con el sentido positivo del eje de abscisas.* O, de otro modo: *la derivada de una función en un punto tiene el mismo valor que el coeficiente angular de la tangente a la curva en ese punto.*

Esta interpretación de la derivada sirve para confirmar lo dicho en el párrafo anterior respecto a las condiciones que ha de cumplir una función para que tenga derivada en un punto. La figura 43 representa una curva continua en el punto P y, sin embargo, no es derivable en él, ya que el cociente incremental tiene distinto límite al tender Δx a cero, según se tome Δx con valores positivos o negativos.

83. Ecuación de la tangente a una curva en un punto. — Si recordamos que la ecuación de las rectas que pasan por el punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

y tenemos en cuenta lo dicho en el párrafo anterior sobre el valor de la derivada de una función en un punto, se deduce que la ecuación de la tangente, en el punto de abscisa igual a x_1, a la curva cuya ecuación es $y = f(x)$, vendrá expresada por

$$\boxed{y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)}$$

en la que $y_1 = f(x_1)$.

84. Derivadas sucesivas. — Hemos dicho anteriormente que si una función $y = f(x)$ tiene derivada en todos los puntos de un intervalo, la función $y' = f'(x)$ que hace corresponder a cada valor de x el valor de la derivada en ese punto de la función propuesta, recibe el nombre de función derivada. De esta función y' se dice que es la *derivada primera* de y.

Para la función $y' = f'(x)$ se puede definir la derivada análogamente a como se hizo para la $y = f(x)$. Esta derivada de la derivada primera se llama *derivada segunda* de y.

Del mismo modo, la derivada de la derivada segunda se llama *derivada tercera* de y.

Dijimos en un párrafo anterior que para representar la derivada primera de y se emplean indistintamente los siguientes símbolos:

$$y'; \quad f'(x); \quad Dy; \quad Df(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d}{dx} f(x)$$

Las diversas notaciones empleadas para representar la derivada segunda son:

$$y''; \quad f''(x); \quad D^2y; \quad D^2f(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2}; \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

y para representar la derivada tercera:

$$y'''; \quad f'''(x); \quad D^3y; \quad D^3f(x); \quad \frac{d^3y}{dx^3}; \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x)$$

Derivando la derivada tercera, obtendremos la derivada cuarta; de ésta, la quinta, y así sucesivamente. A no ser que una de las derivadas sea constante, en cuyo caso, las siguientes derivadas serán nulas.

85. Otras interpretaciones de la derivada. — Muchos conceptos de Física, Química y demás Ciencias Aplicadas adquieren una expresión precisa mediante el empleo de derivadas. Sucede con frecuencia que si un fenómeno puede expresarse matemáticamente por medio de una función, al derivar esta función se obtiene otra que, a su vez, es la expresión de un nuevo aspecto de aquel fenómeno. A continuación veremos dos ejemplos.

1) *Velocidad de un móvil.* — Sabemos que el espacio s recorrido por un móvil sobre una recta (fig. 44), es función del tiempo t empleado en recorrerlo; sea

$$s = f(t)$$

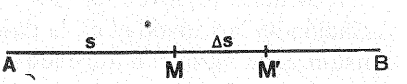

FIG. 44

la ecuación de ese movimiento, es decir, la fórmula que nos da el espacio recorrido en función del tiempo.

Si durante el tiempo t_1, el móvil recorre el espacio

$$s_1 = f(t_1)$$

transcurrido un tiempo pequeño Δt, el espacio recorrido en él, Δs, valdrá

$$\Delta s = f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)$$

Se llama *velocidad media* del móvil en el intervalo o incremento de tiempo Δt, al cociente

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

el cual nos da una idea del movimiento tanto más aproximada cuanto menor sea Δt.

Pasando ahora al límite este cociente, cuando Δt tiende a cero, tendremos por definición lo que se denomina *velocidad verdadera* o *instantánea* del móvil en el tiempo t_1, es decir,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Vemos, pues, *que la velocidad instantánea es la derivada del espacio respecto del tiempo.*

2) *Aceleración.* — La velocidad que acabamos de hallar, derivando la función $s = f(t)$, puede ser constante, y entonces se dice que el movimiento es *uniforme;* de no ser así, v será una función de t,

$$v = f(t)$$

cuya derivada puede hallarse.

Recordemos que, en un movimiento variado, se llama *aceleración* a la variación de la velocidad en la unidad de tiempo. Si esta aceleración no es constante, su variación dependerá del tiempo, y entonces se entiende por *aceleración media* en un intervalo, el cociente de dividir la diferencia de velocidades por la diferencia de tiempos, es decir,

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

si representamos por Δv el incremento de la velocidad y por Δt el correspondiente del tiempo.

Cuanto menor sea Δt, la aceleración media nos dará una idea más aproximada del movimiento; y si pasamos al límite el cociente anterior, cuando Δt tiende a cero, obtendremos la *aceleración verdadera* en el instante t, o sea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Por consiguiente, si observamos que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,\frac{ds}{dt}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

podemos enunciar: *aceleración instantánea es la derivada de la velocidad con relación al tiempo;* o también, *la derivada segunda del espacio con relación al tiempo.*

Adviértase que la velocidad y la aceleración son magnitudes vectoriales y, por tanto, hay que tener en cuenta, además del desplazamiento, la dirección de la trayectoria.

86. Regla general para el cálculo de derivadas. — Para hallar la derivada de una función $y = f(x)$ se efectúan las siguientes operaciones:

1.° *Se sustituye en la función* x *por* x + Δx, *y se calcula el nuevo valor de la función* y + Δy.

2.° *Se halla el incremento de la función, restando para ello de la función incrementada la función sin incrementar.*

3.° *Se obtiene el cociente de incrementos* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

4.° *Se halla el límite a que tiende ese cociente, cuando* Δx $\longrightarrow$ 0. *El límite hallado será la derivada de la función dada.*

EJEMPLO. — Calcular la derivada de la función $y = 2x^2 - 3x + 1$

1.° Incrementando, tenemos:

$$y + \Delta y = 2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1$$
$$y + \Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x + 1$$

2.° Restando la función dada,

$$\Delta y = 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3\Delta x$$

3.° Dividiendo por Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 3$$

4.° Hallando el límite de esta expresión, cuando $\Delta x \to 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x - 3$$

Luego: $D(2x^2 - 3x + 1) = 4x - 3$; o, de otro modo, $y' = 4x - 3$.

EJERCICIO. — Hallar la ecuación de la tangente a la curva que corresponde a la función del ejemplo anterior, en el punto de abscisa 2.

En la ecuación

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

sustituiremos

$$y_1 \quad \text{por} \quad f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 3$$
$$f'(x_1) \quad \text{por} \quad f'(2) = 4 \cdot 2 - 3 = 5, \quad \text{y} \quad x_1 \quad \text{por} \quad 2$$

con lo que resulta

$$y - 3 = 5(x - 2) \quad \text{o su equivalente} \quad 5x - y - 7 = 0$$

87. Derivada de una constante. — Una constante se puede considerar como una función que conserva siempre el mismo valor. Es decir, si

$$y = C, \quad \text{tiene que ser} \quad y + \Delta y = C$$

Restando la función dada, resulta

$$\Delta y = C - C = 0$$

y dividiendo por Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

luego,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Por tanto, *la derivada de una constante es igual a cero.*

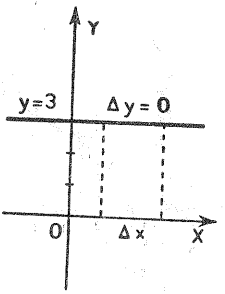

FIG. 45

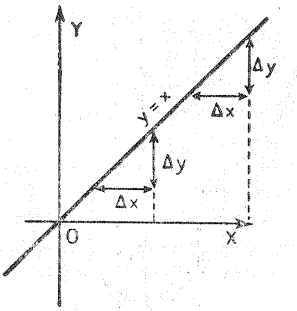

FIG. 46

La interpretación geométrica de este resultado es inmediata. Si representamos gráficamente la función $y = C$ se obtiene una recta paralela al eje de abscisas (fig. 45), y la pendiente de esta recta en cualquiera de sus puntos (cuyo valor es la derivada) es, evidentemente, igual a cero.

88. Derivada de la variable independiente. — Si es $y = x$, el incremento de y será igual al incremento que demos a x, es decir, $\Delta y = \Delta x$.

Por consiguiente,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Luego, *la derivada de la variable independiente es igual a la unidad.*

También en este caso la interpretación geométrica es inmediata. En efecto: la gráfica de la función $y = x$ es la bisectriz del primero y tercer cuadrante, y su pendiente en cualquiera de los puntos es igual a 1 (fig. 46).

EJERCICIOS

182. Determinar el coeficiente angular de las tangentes t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 (figura 47).

183. Escribir la ecuación de las tangentes t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, a que se refiere el ejercicio anterior.

184. Dada la función $y = f(x)$, cuya gráfica está representada en la figura 48, decir si tiene derivada en el punto $x = 2$. Justificar la respuesta.

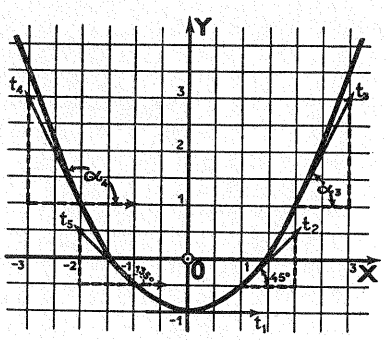

FIG. 47

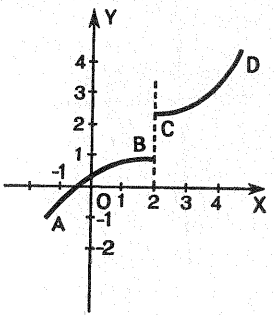

FIG. 48

185. Hallar la derivada de las siguientes funciones, aplicando la regla general para el cálculo de derivadas:

$$y = x^2; \qquad y = 3x^2 + 5; \qquad y = 2x^3 - 4; \qquad y = 4x^3 - 3x^2$$

$$y = \frac{3}{x^2 + 1}; \qquad y = \frac{x + 4}{x}; \qquad y = \frac{1}{1 - 2x}; \qquad y = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

186. Determinar las ecuaciones de las tangentes a las curvas que corresponden a las cuatro primeras funciones del ejercicio anterior, en los puntos de abscisa 1, 0, 2 y -2, respectivamente.

187. ¿Cómo se pueden hallar los puntos de la gráfica de una función en los cuales la tangente es paralela al eje OX? Aplíquese a la función $y = x^3 - 12x$.

188. Dada la curva $y = 2x^2 - 3x - 1$, hallar las coordenadas del punto de dicha curva en el cual la tangente forma con el eje OX un ángulo de 45°.

189. Hallar los coeficientes de la función $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (0, 3) y por (2, 1), y que en este último punto su tangente tiene por pendiente 3.

190. Dada la ecuación de los siguientes movimientos rectilíneos:

$$s = 50 + 40t; \qquad s = 19 + 9'8t^2; \qquad s = 5t^3$$

se desea saber su velocidad y aceleración para $t_1 = 0$ y $t_2 = 7$.

191. La ecuación de un movimiento rectilíneo es $s = t^3 - 27t$. ¿En qué momento es nula la velocidad?

192. La ecuación de un movimiento circular es $\varphi = \frac{1}{12}t^2$. ¿Cuál es la velocidad angular al cabo de 7 segundos?

12. Cálculo de derivadas

89. Derivada de una suma de funciones. — Sean u, v, w tres funciones continuas y derivables, de x. Representemos por y a la suma de todas ellas, la cual será a su vez función de x; tendremos

$$y = u + v + w$$

Si damos a x un incremento Δx, resulta:

$$y + \Delta y = (u+\Delta u) + (v+\Delta v) + (w+\Delta w)$$

restando de ésta la igualdad anterior, se obtiene

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w$$

dividiendo por Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

pasando al límite cuando Δx tiende a cero,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

luego,

$$\boxed{y' = u' + v' + w'}$$

La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de dichas funciones.

EJEMPLO. — Hallar la derivada de $3x^2 + 5x - 2$.

$$D(3x^2+5x-2) = D(3x^2) + D(5x) + D(-2) = 6x + 5$$

90. Derivada de un producto de funciones. — Sea el producto de dos funciones continuas y derivables

$$y = u \cdot v$$

Incrementando x en Δx, las funciones reciben sendos incrementos, Δu, Δv, Δy, por lo que resulta

$$y + \Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v$$

restando de ésta la igualdad anterior, se halla

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v$$

dividiendo por Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$$

haciendo que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} = vu'; \qquad \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} = uv' \cdot \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v = u' \cdot 0 = 0$$

luego, en definitiva, tendremos

$$\boxed{y' = v\,u' + u\,v'}$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la suma de los productos de cada una de ellas por la derivada de la otra.

Si uno de los factores es constante, es decir, se trata del producto $y = uC$, tendremos

$$y' = C\,u' + u\,C'$$

pero la derivada de una constante es cero, o sea, $C' = 0$; luego, $y' = C\,u'$.

La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Para un producto de más de dos factores, puede seguirse el siguiente razonamiento.

Sea el producto

$$y = u \cdot v \cdot w$$

Asociando factores, podemos escribir

$$y = u(v\,w)$$

aplicando la regla de la derivada del producto de dos funciones,

$$y' = (v\,w)\,u' + u\,(v\,w)'$$

pero

$$(v\,w)' = w\,v' + v\,w'$$

por consiguiente,

$$y' = v\,w\,u' + u\,(w\,v' + v\,w') = v\,w\,u' + u\,w\,v' + u\,v\,w'$$

o, también,

$$\boxed{y' = u'\,v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'}$$

En general, diremos: *la derivada de un producto de* n *funciones es igual a la suma de* n *sumandos, cada uno de los cuales se obtiene sustituyendo, en el producto considerado, una de las funciones por su respectiva derivada.*

EJEMPLO 1.º — $D(x^2) = D(x \cdot x) = 1 \cdot x + 1 \cdot x = 2x$

EJEMPLO 2.º — $D(x^3) = D(x \cdot x \cdot x) = 1 \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot 1 = 3x^2$

EJEMPLO 3.º — $D(5x^3 + 3x^2 - 2x + 4) = 5 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 2 = 15x^2 + 6x - 2$

EJEMPLO 4.º — La derivada de $y = (3x^2 - 4)(x^3 + 2x)(5x - 1)$ es

$$y' = 6x(x^3 + 2x)(5x - 1) + (3x^2 - 4)(3x^2 + 2)(5x - 1) + (3x^2 - 4)(x^3 + 2x)\,5$$

91. Derivada de un cociente de funciones. — Sea el cociente de dos funciones de x, continuas y derivables,

$$y = \frac{u}{v}$$

Incrementando en Δx a la variable, las funciones reciben sendos incrementos, Δu, Δv, Δy, y resulta

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

restando de ésta la igualdad anterior,

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 - v\Delta v}$$

dividiendo por Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$$

y pasando al límite, cuando $\Delta x \longrightarrow 0$,

$$\boxed{y' = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2}}$$

La derivada de un cociente de funciones es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, y dividido todo por el cuadrado del denominador.

Si el denominador es constante, $v = C$, su derivada es nula, y nos queda

$$\boxed{D\left(\frac{u}{C}\right) = \frac{u'}{C}}$$

Si el numerador es constante, $u = C$, su derivada es cero, y resulta

$$\boxed{D\left(\frac{C}{v}\right) = \frac{-Cv'}{v^2}}$$

EJEMPLO 1.º — $D\left(\dfrac{x}{2x+3}\right) = \dfrac{(2x+3)\cdot 1 - x\cdot 2}{(2x+3)^2} = \dfrac{3}{(2x+3)^2}$

EJEMPLO 2.º — $D\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) = \dfrac{(1-x^2)\cdot 2x - (1+x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$

EJEMPLO 3.º — $D\left(\dfrac{2x}{x^2+1} \times \dfrac{x^2-2}{3}\right) = D\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^3-2x}{x^2+1}\right) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^4+5x^2-2}{(x^2+1)^2}$

92. Derivada de la función potencial de exponente natural. — Sea la función

$$y = x^m$$

en donde m representa un número entero positivo.

Aplicando la regla general de derivación, se tiene, sucesivamente:

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^m =$$

$$= x^m + mx^{m-1}\Delta x + \binom{m}{2} x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + \binom{m}{m}(\Delta x)^m$$

$$\Delta y = mx^{m-1}\Delta x + \binom{m}{2} x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + \binom{m}{m}(\Delta x)^m$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2}\Delta x + \ldots + \binom{m}{m}(\Delta x)^{m-1}$$

Al pasar al límite, cuando $\Delta x \longrightarrow 0$, los términos del segundo miembro a partir del segundo tienden a cero; luego,

$$\boxed{y' = m\,x^{m-1}}$$

La derivada de la función potencial $y = x^m$, *de exponente natural, es igual al exponente multiplicado por la base elevada al mismo exponente disminuído en una unidad.*

Anteriormente hemos visto casos particulares de esta regla: *a)* Si $m = 0$, $D(x^0) = 0$; *b)* Si $m = 1$, $D(x^1) = 1$; *c)* Si $m = 2$, $D(x^2) = 2x$; *d)* Si $m = 3$, $D(x^3) = 3x^2$.

EJEMPLO 1.º — $D(6x^5) = 6 \cdot 5\,x^4 = 30\,x^4$

EJEMPLO 2.º — Para hallar la derivada de $y = 8x^3$ en el punto $x = -1$, se halla primero la función derivada de $y = 8x^3$, que es $y' = 24x^2$, y luego se sustituye en ésta x por -1, con lo que se obtiene $y' = 24$.

93. Derivada de un polinomio. — Todo polinomio entero en x puede considerarse como la suma algebraica de funciones de x de la forma ax^m; por consiguiente, su derivada será la de una suma de funciones.

La forma general como se representa un polinomio entero en x es

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m$$

y, por tanto, podemos escribir

$$f'(x) = ma_0x^{m-1} + (m-1)\,a_1x^{m-2} + \ldots + 2a_{m-2}x + a_{m-1}$$

La derivada de un polinomio es otro polinomio de grado inferior en una unidad e igual a la suma de las derivadas de los términos del primero.

EJEMPLO. — El polinomio $y = 3x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 1$ tiene por derivada

$$y' = 15x^4 - 6x^2 + 8x$$

94. Derivadas sucesivas. — Cuando hallamos la derivada de una función, y a la función resultante le volvemos a hallar la derivada, y a la función obtenida se le vuelve a calcular su derivada, y así sucesivamente, las derivadas obtenidas se llaman *derivadas sucesivas* de la función propuesta.

Así, las derivadas sucesivas de $y = 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5x + 4$ son:

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 6x^2 + 14x - 5 \\ y'' &= 36x^2 - 12x + 14 \\ y''' &= 72x - 12 \\ y^{IV} &= 72 \\ y^{V} &= 0 \end{aligned}$$

En general, diremos: *un polinomio de grado* n-*ésimo tiene* n *derivadas distintas de cero, y a partir de la de orden* n + 1 *todas son nulas.*

95. Derivada de la potencia de una función. — Sea la función

$$y = u^m$$

formada por la potencia m-ésima de la función u, de x, y en donde m representa un número natural.

Podemos considerarla como un producto de m factores iguales a u, es decir,

$$y = u \cdot u \cdot u \cdot \ldots \cdot u$$

y aplicando la regla de la derivada de un producto de funciones (90), será

$$y' = u \cdot u \cdot \ldots \cdot u' + u \cdot u \cdot \ldots \cdot u' + \ldots + u \cdot u \cdot \ldots \cdot u'$$

o, más brevemente,

$$\boxed{y' = m\,u^{m-1} \cdot u'}$$

EJEMPLO. — $D\,(3x-2)^5 = 5\,(3x-2)^4 \cdot 3 = 15\,(3x-2)^4$

Si desarrollamos la potencia $(3x-2)^5$ y calculamos la derivada del resultado, veremos que coincide con la solución hallada.

EJERCICIOS

193. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1.° $y = 7$ 3.° $y = -\sqrt{2}$ 5.° $y = \frac{x}{5}$ 7.° $y = -\frac{5}{8}x$

2.° $y = -5$ 4.° $y = 2x$ 6.° $y = -6x$ 8.° $y = ax$

194. Calcular las derivadas de las funciones:

1.° $y = x^2$ 3.° $y = 3x - 2$ 5.° $y = 5 - 3x$ 7.° $y = x^{n-1}$

2.° $y = \frac{3}{2}x^2$ 4.° $y = 2x^2 + 3$ 6.° $y = 2x^3 + x$ 8.° $y = ax^m + b$

195. Hallar las derivadas de las funciones:

1.° $y = 3x^2 - 5x + 1$ 4.° $y = \frac{4}{7}x^5 + 3x - \frac{5}{9}$

2.° $y = 3 - 2x^2 + x^4$ 5.° $y = \frac{6x^4}{11} - 5x^2 + \frac{2}{3}x + 4$

3.° $y = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$ 6.° $y = a - bx + cx^2$

196. Calcular las derivadas de las funciones:

1.° $y = x\,(x+2)$ 4.° $y = (4+x)\,(x-1)$

2.° $y = x^2\,(7-x)$ 5.° $y = (x-2)\,(x-3)$

3.° $y = (x+2)\,(x-3)$ 6.° $y = (x^2-1)\,(x+1)$

197. Calcular las derivadas de las funciones:

1.° $y = (x^2+2)(x^3+3)$
2.° $y = (2x^3-2)(3x^2-x)$
3.° $y = (5x^2+4x-3)(2x+7)$
4.° $y = (2x+3)(x^2+4x-5)$
5.° $y = (1+5x^3)(1+3x^2)$
6.° $y = (a+x)(b-x)$
7.° $y = (3x^2-1)(x+2) - (x^2+1)$
8.° $y = (2x^3+5) - (x^2-3)(7+x)$

198. Calcular las derivadas de las funciones:

1.° $y = (x+1)(x-3)(x+2)$
2.° $y = (x-4)(x-1)(x+3)$
3.° $y = (x-1)(2x+3)(5-x)$
4.° $y = (x^2-1)(x^2+3)(x^2-2)$
5.° $y = 2x^3(x^2-1)(x+1)$
6.° $y = (3x+2)(2x-3)(x^2+9)$
7.° $y = (1+3x^2)(1-3x^2)(x+2)(x-2)$
8.° $y = (3a-x)(3a+x)(9a^2+x^2)$

199. Calcular las derivadas de las funciones:

1.° $y = \dfrac{x}{3}$
2.° $y = \dfrac{2}{x}$
3.° $y = \dfrac{1}{3x^2}$
4.° $y = \dfrac{1}{1-2x}$
5.° $y = \dfrac{x}{x+1}$
6.° $y = \dfrac{x-1}{x}$
7.° $y = \dfrac{a+x}{a-x}$
8.° $y = \dfrac{x-a}{x+a}$
9.° $y = \dfrac{x+1}{x-1}$
10. $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 7x}{x}$

200. Calcular las derivadas de las funciones:

1.° $y = \dfrac{2x-1}{3+x}$
2.° $y = \dfrac{3x}{2x^3-1}$
3.° $y = \dfrac{7-x}{2+3x-x^2}$
4.° $y = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$
5.° $y = \dfrac{x^2+5}{x^2+6}$
6.° $y = x^4 + 3x^2 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{1}{x^2}$
7.° $y = \dfrac{x^2(x^3-1)}{5x^3+1}$
8.° $y = \dfrac{3x^2+1}{x(2x+1)}$
9.° $y = \dfrac{5x}{x^2-1} \times \dfrac{x^2+1}{7}$

201. Calcular las derivadas sucesivas de las funciones:

1.° $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$

2.° $y = x^4 + x^3 - 5x + 1$

3.° $y = 3x^6 - 2x^4 + 3x^2$

4.° $y = x^5 - 3x^2 + 7$

5.° $y = \dfrac{1}{x^2}$

6.° $y = \dfrac{x^3}{2}$

202. Calcular las derivadas de las funciones:

1.° $y = (x-2)^4$
2.° $y = (x+a)^5$
3.° $y = (x^2-1)^3$
4.° $y = (x^2-3x+2)^2$
5.° $y = (ax^2+b)^4$
6.° $y = (x^n+1)^m$
7.° $y = (x^3-1)^2 + x^2$
8.° $y = 2x^4 - (3x^2+1)^2$

203. Calcular las derivadas de las funciones:

1.° $y = x(x+1)^2$
2.° $y = (x-1)^3(x+1)^2$
3.° $y = (x-2)^2(2+x)$
4.° $y = (3x+1)^2 - (3x-1)^2$
5.° $y = (x-1)(x+1)^2(x^2-1)^3$

204. Hallar la primera y segunda derivada de la función $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, simplificando los resultados.

205. Hallar el valor que toma la primera derivada de $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+2}$ para aquellos valores que anulan a la función.

206. Hallar la derivada de las funciones:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4; \qquad y = \frac{x-1}{x+1}$$

y calcular el valor de la derivada de la primera función para $x = -2$ y el de la derivada de la segunda función para $x = 2$.

207. Calcular el valor que ha de tener a para que la derivada de la función $y = \dfrac{x^3 + a}{3x}$ sea 2 cuando $x = 4$.

208. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A\,(1, 2)$ y por el punto $B\,(3, n)$, siendo n el valor de la derivada de la función $y = 3x^2 - 6x - 1$, en el punto de abscisa $x = 1$.

13. Cálculo de derivadas (cont.)

96. Derivada de una función de función. — Supongamos la función

$y = f(u)$ en la que $u = \varphi(x)$ o sea, es $y = f[\varphi(x)]$

Si incrementamos a la variable independiente x en Δx, el incremento que recibirá la función u será

$$\Delta u = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$$

y al variar u, lo hará también y, siendo su incremento

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

Ahora bien: si en la igualdad evidente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

tomamos límites cuando $\Delta x \longrightarrow 0$, resulta, por la regla del límite de un producto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Suponiendo que las funciones $f(u)$ y $\varphi(x)$ son continuas, al tender a cero Δx, también Δu tenderá a cero, y por tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{o de otro modo} \quad \boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

expresión que se lee: «derivada de y respecto de x, igual a derivada de y respecto de u, por derivada de u respecto de x».

La derivada de una función de función es igual al producto de las derivadas de cada una de las funciones con respecto a la variable de que inmediatamente dependen.

Hemos demostrado el teorema cuando se trata de una función de función, pero de igual manera se hubiera demostrado si se tratase de una función de función de función de x; es decir, si fuera

$$y = f(z), \qquad z = \varphi(u), \qquad u = \psi(x)$$

resultaría

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{o bien} \qquad y'_x = y'_z \cdot z'_u \cdot u'_x$$

En general, cualquiera que sea el número de funciones dependientes una de otra, y todas a su vez de la variable independiente, se cumple la regla arriba expuesta.

Anteriormente hemos visto casos particulares de esta regla. Así, por ejemplo, la potencia m-ésima de una función u es una función de función de x, y la regla dada para hallar su derivada (95) es sencillamente la interpretación de la que acaba de enunciarse.

EJEMPLO. — La derivada de $y = (5x^2 - 2x + 1)^3$ se calcula haciendo

$$u = 5x^2 - 2x + 1, \quad \text{con lo que resulta} \quad y = u^3$$

Es decir, en este caso es $y = f(u) = u^3$, $u = \varphi(x) = 5x^2 - 2x + 1$; y como $f'(u) = 3u^2$ y $\varphi'(x) = 10x - 2$, aplicando la regla anterior, se tiene

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = 3u^2(10x - 2) = 3(5x^2 - 2x + 1)^2(10x - 2)$$

97. Derivada de dos funciones inversas. — Sea la función

$$y = f(x) \quad \text{y su inversa} \quad x = \varphi(y)$$

ambas continuas y derivables.

A un incremento de x, corresponde en la primera función un incremento de y, y para este Δy corresponde en la segunda función un incremento de x, igual al dado a x en la primera función.

Ahora bien: teniendo en cuenta que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} \qquad \text{será} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

puesto que cuando Δx tiende a cero, también Δy tiende a cero, por ser $y = f(x)$ una función continua. De donde, resulta

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Es decir: *Las derivadas de dos funciones inversas son recíprocas.*

98. Derivada de una raíz. — Sea la función $y = \sqrt[n]{u}$, en la que $u = f(x)$. De la función dada se deduce

$$y^n = u \quad \text{y derivando} \quad ny^{n-1}y' = u'$$

de donde

$$y' = \frac{u'}{ny^{n-1}} = \frac{u'}{n(\sqrt[n]{u})^{n-1}} = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Es decir:

$$D(\sqrt[n]{u}) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

El caso más frecuente es el de la raíz cuadrada, cuya derivada se obtiene haciendo $n = 2$ en la fórmula anterior, por lo que resulta

$$D(\sqrt{u}) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Es decir: *La derivada de la raíz cuadrada de una función, es igual a la derivada de la función dividida por el doble de la raíz.*

EJEMPLOS:

1) $D(\sqrt[3]{x}) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

2) $D(x^3 + 5\sqrt{x}) = 3x^2 + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

3) $D(\sqrt[4]{x}) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ 4) $D(x^2+x+2\sqrt{x}) = 2x + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5) $D(\sqrt[3]{4x^2-5x}) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(4x^2-5x)^2}} \cdot D(4x^2-5x) = \dfrac{8x-5}{3\sqrt[3]{(4x^2-5x)^2}}$

99. Derivada del logaritmo. — I. DERIVADA DE $y = \ln x$. — Vamos a calcular la derivada de esta función, aplicando la regla general.

Incrementando, tenemos

$$y + \Delta y = \ln(x+\Delta x)$$

Restando de ésta la primera igualdad,

$$\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x$$

El segundo miembro es el logaritmo de un cociente, es decir,

$$\Delta y = \ln \frac{x+\Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Dividiendo ambos miembros por Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Haciendo

$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha \quad \text{de donde se deduce} \quad \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{x\alpha}$$

la igualdad anterior se transforma en

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\alpha} \ln(1+\alpha) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Pasemos al límite, cuando Δx tiende a cero. Obsérvese que si $\Delta x \longrightarrow 0$, también $\alpha \longrightarrow 0$, y como

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \qquad \text{y} \qquad \ln e = 1$$

quedará, en definitiva,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$$

Luego, la derivada de $y = \ln x$ es $\boxed{y' = \frac{1}{x}}$

La derivada del logaritmo neperiano de x *es igual a la unidad dividida por* x.

Cuando se trate de la función de función

$$y = \ln u \qquad \text{siendo} \qquad u = f(x)$$

como $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ tendremos: $D(\ln u) = \dfrac{u'}{u}$

EJEMPLOS: 1) $D[\ln(x^2+1)] = \dfrac{2x}{x^2+1}$

2) $D(x \cdot \ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

3) $D\left(\ln \dfrac{1+x}{1-x}\right) = D[\ln(1+x) - \ln(1-x)] = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x^2}$

4) $D(\ln \sqrt{1+x^2}) = \dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{1+x^2}$

II. DERIVADA DE $y = \log_a x$. — Para hallar la derivada de esta función, recordemos (44 y 45) que

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \ln x \cdot \log_a e$$

Tomando ahora derivadas, se obtiene

$$\boxed{y' = D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e}$$

En el caso de que se trate de la función de función

$$y = \log_a u \qquad \text{siendo} \qquad u = f(x)$$

como $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ tendremos: $\boxed{D(\log_a u) = \dfrac{u'}{u \ln a} = \dfrac{u'}{u} \log_a e}$

EJEMPLOS: 1) $D[\log_a (1-x)] = -\dfrac{x}{(1-x)\ln a}$

2) $D(\log \sqrt[4]{x^3}) = \dfrac{\dfrac{3x^2}{4\sqrt[4]{x^9}}}{\sqrt[4]{x^3} \ln 10} = \dfrac{3x^2}{4\sqrt[4]{x^{12}} \ln 10} = \dfrac{3}{4x \ln 10}$

100. Derivada de la función exponencial. — La función exponencial $y = a^x$ tiene por inversa $x = \log_a y$

Por consiguiente, sus derivadas serán recíprocas. Ahora bien: la derivada de

$$x = \log_a y \qquad \text{es} \qquad x' = \frac{1}{y \ln a}$$

luego, la de $y = a^x$ será

$$y' = \frac{1}{x'} = y \ln a = a^x \ln a \quad \text{o sea} \quad \boxed{D(a^x) = a^x \ln a}$$

La derivada de la función exponencial es igual a la misma función multiplicada por el logaritmo neperiano de la base.

Como $\ln e = 1$, en el caso particular de ser $y = e^x$, resultará

$$y' = e^x \ln e = e^x \quad \text{o sea} \quad \boxed{D(e^x) = e^x}$$

La derivada de la función exponencial $y = e^x$ *es igual a la misma función.* Como consecuencia, las derivadas sucesivas *de* $y = e^x$ *tienen todas igual valor que la función.*

EJEMPLOS: 1) $D(3^x) = 3^x \ln 3 = 3^x \dfrac{\log 3}{\log e}$

2) $D(2 \cdot 5^x + 3e^x) = 2 \cdot 5^x \ln 5 + 3e^x$

101. Aplicaciones del crecimiento o decrecimiento exponencial. — Sea la función exponencial $y = ke^{ax}$

Se trata de una función de función y, por tanto, su derivada será

$$y' = ke^{ax} \cdot a \quad \text{o sea} \quad y' = ay$$

Vemos, pues, que *la derivada de la función exponencial* $y = ke^{ax}$ *es proporcional a la función misma.*

Esta propiedad es de extraordinario interés científico, ya que permite formular matemáticamente la ley de crecimiento o decrecimiento continuo de muchos fenómenos físicos, químicos, biológicos, financieros y otros de orden técnico, en los que la velocidad de crecimiento es proporcional a la función.

He aquí algunos ejemplos:

1.° En el interés continuo (ver párrafo 42), el interés es proporcional en cada instante al capital formado hasta ese momento. Esto indica que la variación del capital formado a interés continuo es función exponencial del tiempo. Recordemos, en efecto, que

$$C = ce^{rt}$$

2.° La cantidad de calor emitido por un cuerpo en la unidad de tiempo es proporcional al exceso de su temperatura sobre la del medio que le rodea. Lo que significa que la variación de temperatura de un cuerpo, por enfriamiento, es función exponencial del tiempo, y se expresa por la fórmula

$$T = T_0 e^{-at}$$

en la que T representa el exceso de temperatura del cuerpo sobre el medio ambiente al cabo del tiempo t, T_0 es ese mismo exceso al comenzar el experimento, y $-a$ es una constante que depende del cuerpo considerado.

En éste y en los demás casos en que se trate de decrecimiento, obsérvese que el exponente de e (base de los logaritmos naturales) es negativo.

3.° Si la temperatura es constante, la presión atmosférica disminuye al aumentar la altura; y como la densidad del aire depende de la presión, el peso de cada capa será proporcional a la presión a que esté sometida. Por tanto, la velocidad de variación de la presión atmosférica es proporcional a la presión misma, y su función será de la forma

$$p = p_0 e^{-ah}$$

en la que p_0 es la presión al nivel del mar ($h=0$), p la presión a la altura h, y $-a$ la velocidad con que varía la presión cuando ésta es de una atmósfera.

4.° En la desintegración de los cuerpos radiactivos, en cada instante se va destruyendo una parte del cuerpo, que es proporcional a la cantidad total del mismo; o sea, que la variación de peso del cuerpo es función exponencial del tiempo. Se tiene, para este caso, la fórmula

$$N = N_0 e^{-at}$$

en donde N_0 es el número de átomos al comenzar ($t=0$), N el número de átomos al cabo del tiempo t, y $-a$ la constante de desintegración, propia de cada sustancia.

5.° En las reacciones químicas denominadas monomoleculares, la velocidad con que se forma una nueva sustancia es poporcional a la concentración del reactivo que todavía queda por reaccionar. Se trata, por tanto, de un decrecimiento exponencial, y su fórmula es

$$c = c_0 e^{-at}$$

en la que c_0 es la concentración correspondiente al tiempo cero, o sea al comenzar la experiencia.

102. Derivada logarítmica: aplicaciones. — Se llama *derivada logarítmica* de una función $z = f(x)$, a la derivada de su logaritmo neperiano, es decir, a la derivada de la función $y = \ln f(x)$.

Pero la derivada de $y = \ln f(x)$ es

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{z'}{z}$$

Luego: *La derivada logarítmica de una función es igual a la derivada de la función dividida por dicha función.*

Se entiende por derivada logarítmica de un producto, cociente o potencia de una o varias funciones, la derivada del logaritmo neperiano de estas operaciones.

I. Producto. — Sea el producto de funciones $y = u\,v\,w$.

Tomando logaritmos neperianos, resulta

$$\ln y = \ln u + \ln v + \ln w$$

y derivando esta suma de funciones,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$$

La derivada logarítmica de un producto es igual a la suma de las derivadas logarítmicas de sus factores.

Si multiplicamos la expresión anterior por $y = uvw$, tendremos otra demostración de la regla de la derivada de un producto. En efecto, resulta

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'$$

II. COCIENTE. — Sea el cociente de dos funciones $y = \frac{u}{v}$.

Tomando logaritmos neperianos y derivando luego, se obtiene:

$$\ln y = \ln u - \ln v; \qquad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

La derivada logarítmica de un cociente es igual a la derivada logarítmica del dividendo menos la derivada logarítmica del divisor.

Multiplicando la última igualdad por $y = \frac{u}{v}$ se obtiene otra prueba de la regla de la derivada de un cociente. En efecto, resulta

$$y' = \frac{u'u}{uv} - \frac{v'u}{v^2} = \frac{u'uv^2 - v'vu^2}{uv^3} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

III. POTENCIA. — Análogamente, se tiene para una potencia:

$$y = u^m; \qquad \ln y = m \ln u; \qquad \frac{y'}{y} = m\frac{u'}{u}$$

La derivada logarítmica de una potencia es igual al exponente por la derivada logarítmica de la base.

Multiplicando la última igualdad por $y = u^m$ se justifica y generaliza, cualquiera que sea el exponente m (*), la regla de la derivada de una potencia. Tenemos, en efecto,

$$y' = m\frac{u^m u'}{u} = mu^{m-1}u'$$

(*) Hasta ahora hemos deducido la regla solamente para exponentes naturales

Como aplicación de lo que precede, vamos a calcular algunas derivadas utilizando la derivación logarítmica.

EJEMPLO 1.º — Calcular la derivada de $y = (x^2+1)\sqrt[3]{x-1}$.

Expresando la raíz en forma de exponente fraccionario y tomando luego logaritmos neperianos, resulta

$$y = (x^2+1)(x-1)^{\frac{1}{3}}; \qquad \ln y = \ln(x^2+1) + \tfrac{1}{3}\ln(x-1)$$

derivando,

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{7x^2-6x+1}{3(x^2+1)(x-1)}$$

y multiplicando por $y = (x^2+1)(x-1)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{7x^2-6x+1}{3(x^2+1)(x-1)}(x^2+1)(x-1)^{\frac{1}{3}} = \frac{7x^2-6x+1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

EJEMPLO 2.º — Calcular la derivada de la función *potencial-exponencial* $y = x^x$.

Tomando logaritmos neperianos, se tiene

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

derivando (observemos que el segundo miembro es un producto de dos funciones),

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

y multiplicando por $y = x^x$,

$$y' = (\ln x + 1)\, x^x$$

EJEMPLO 3.º — Hallar la derivada de $y = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$

Tomando logaritmos neperianos, se tiene

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln\frac{a-x}{a+x} = \frac{1}{2}[\ln(a-x) - \ln(a+x)]$$

derivando,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a-x} - \frac{1}{a+x}\right) = -\frac{a}{a^2-x^2}$$

y multiplicando por y,

$$y' = -\frac{a}{a^2-x^2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

EJERCICIOS

209. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = x^2(1-x)^3$
2) $y = (x+1)^2(x-1)^2$
3) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^3 - 4x^2 - 5}$
4) $y = \dfrac{x^5}{(1-x)^5}$
5) $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$
6) $y = \dfrac{x^m}{(1+x)^m}$
7) $y = \dfrac{(2x-1)^3}{(x^2-3)^4}$

210. Derivar las funciones:

1) $y = \sqrt{x}$
2) $y = \sqrt{3x}$
3) $y = \sqrt{2-x}$
4) $y = \sqrt[3]{x}$
5) $y = \sqrt[3]{3x^2}$
6) $y = \sqrt{5+4x^2}$
7) $y = 2\sqrt{x^4-1}$
8) $y = \sqrt[5]{x+1}$

211. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \sqrt{3x^2-4x+1}$
2) $y = \sqrt[3]{5x^2+2x-7}$
3) $y = x^2 + \sqrt{x^3-2}$
4) $y = \sqrt{3x} - \sqrt{3-x}$
5) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$
6) $y = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{x}$
7) $y = 2x + 1 - \sqrt{x^2-x+1}$
8) $y = \sqrt{x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

212. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = x\sqrt{3x^2-1}$

2) $y = (x+1)\sqrt{2x^2-1}$

3) $y = (x-1)\sqrt{1-x^2}$

4) $y = (3x-2)\sqrt{x^2+1}$

5) $y = (x+a)\sqrt{x-a}$

6) $y = (x^2-x+1)\sqrt{1-x^2}$

7) $y = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x}$

8) $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$

9) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

10) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

213. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \ln(3x^2-7)$

2) $y = \ln(2a-x^3)$

3) $y = \ln(x^4+2x^3+1)$

4) $y = x\ln x$

5) $y = \dfrac{1}{x}\ln x$

6) $y = x\ln x - x^2$

7) $y = x(\ln x - 1)$

8) $y = \ln(x-2)^2$

214. Derivar las funciones:

1) $y = \ln\dfrac{2x}{1-x}$

2) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$

3) $y = \ln\dfrac{3-7x}{4x-1}$

4) $y = \ln\dfrac{2x-1}{3x-1}$

5) $y = \ln\dfrac{x^2-1}{x+2}$

6) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{2x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{2}}$

215. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \ln x^5$

2) $y = \ln x^n$

3) $y = \ln\sqrt{x}$

4) $y = \sqrt{\ln x}$

5) $y = \ln(\ln x^4)$

6) $y = \ln\sqrt[4]{x^3}$

7) $y = \ln(x\sqrt{1-x^2})$

8) $y = \ln\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

216. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \log_a(1+x)$

2) $y = \log_a(1-3x^2)$

3) $y = \log_a(2x^3-x+1)$

4) $y = \log_2(3x-1)$

5) $y = \log\dfrac{1-x}{1+x}$

6) $y = \log(x\sqrt{1+x^2})$

217. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = a^{5x^2}$ 3) $y = 8^{3x^2-1}$ 5) $y = e^{x^2}$ 7) $y = a^x x^a$

2) $y = a^{4x^3}$ 4) $y = 10^{5x+3}$ 6) $y = 7^x - 4\,e^x$ 8) $y = a^x \ln x$

218. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = e^x \ln x$ 4) $y = \dfrac{a^x}{e^x}$ 6) $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

2) $y = x^3 e^{x+1}$

3) $y = e^x (x-1)$ 5) $y = \dfrac{e^x}{x^a}$ 7) $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$

219. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \dfrac{\ln x}{a^x}$ 4) $y = \ln \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ 7) $y = e^{\sqrt{x}}$

2) $y = \ln \dfrac{x}{e^x}$ 5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^x}}$ 8) $y = a^{x\sqrt{x}}$

3) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 6) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a^x}$

220. Aplicar la derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = x^{x^2}$ 2) $y = \sqrt[x]{x}$ 3) $y = e^{x^x}$ 4) $y = a^{e^x}$ 5) $y = e^{e^x}$

221. Dada la función $y = e^{-x}$, hallar su derivada y averiguar si ésta puede anularse en algún punto.

222. Hallar la derivada de las funciones:

1) $y = (x - \sqrt{1-x^2})^2$ 2) $y = x\sqrt{\dfrac{4}{(x-5)^2} - 1}$ 3) $y = \dfrac{e^x (1+x)^4}{1 + x^2}$

223. Calcular el valor de la derivada de la función $y = \dfrac{4}{3}(x^2 + x - 3)\sqrt{(1-x^2)^3}$ para $x = \frac{1}{2}$.

224. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x}{3} + 1$ en el punto de abscisa $x = 2$.

225. Determinar m con la condición de que el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = \dfrac{mx + 1}{2x + m}$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea igual a -1.

14. Derivada de las funciones circulares

103. Límite de la razón del seno al arco cuando éste tiende a cero. — Deseamos hallar el límite de la función

$$y = \frac{\text{sen } x}{x} \text{ cuando } x \longrightarrow 0$$

Supongamos (fig. 49) un ángulo agudo AOB, en el que se ha trazado: el arco correspondiente $AB = x$, con radio igual a la unidad; la ordenada CB del extremo del arco, siendo por tanto $CB = \text{sen } x$; la tangente AT, por lo que $AT = \text{tg } x$; y la tangente BD.

En virtud de conocidas relaciones geométricas, podemos escribir

$$CB < \text{arco } AB < AD + DB$$

y como

$$AD + DB < AD + DT = AT$$

por ser $DB < DT$ (ya que DT es hipotenusa y DB cateto del triángulo rectángulo DBT), tendremos, en definitiva

$$CB < \text{arco } AB < AT$$

o lo que es igual,

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x$$

Si dividimos ahora sen x por los miembros de esta doble desigualdad, resultará esta otra, de signo contrario,

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

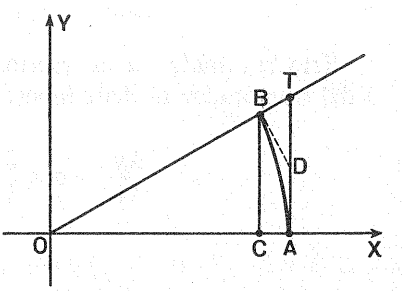

FIG. 49

Cuando $x \longrightarrow 0$, el límite de $\cos x$ es 1; por consiguiente,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

ya que está constantemente compendido entre 1 y una variable que tiende a 1.

El límite de la razón del seno al arco cuando éste tiende a cero, es igual a 1.

104. Derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$. — Para hallar la derivada de esta función seguiremos la regla general.

Incrementemos la variable x:

$$y + \Delta y = \operatorname{sen} (x + \Delta x)$$

Restemos de la función incrementada la función sin incrementar:

$$\Delta y = \operatorname{sen} (x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$$

Sustituyamos la diferencia de senos del segundo miembro por su equivalente (*):

$$\Delta y = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}$$

Dividamos ahora por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Este resultado puede escribirse también así, pasando el coeficiente 2 del numerador al denominador:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$$

(*) Recuérdese que $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \dfrac{A + B}{2} \operatorname{sen} \dfrac{A - B}{2}$.

Cuando $\Delta x \longrightarrow 0$, $\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \longrightarrow \cos x$ y $\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \longrightarrow 1$

Luego,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \quad \text{es decir} \quad \boxed{y' = \cos x}$$

La derivada de la función y = *sen* x *es* y′ = *cos* x.

Si se trata de la función de función

$$y = \operatorname{sen} u, \quad \text{siendo} \quad u = f(x)$$

tendremos que $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, o sea,

$$\boxed{D(\operatorname{sen} u) = \cos u \cdot Du}$$

EJEMPLOS: 1) $D(\operatorname{sen} mx) = \cos mx \cdot Dmx = m \cos mx$

2) $D(\operatorname{sen} x^2) = \cos x^2 \cdot Dx^2 = 2x \cos x^2$

3) $D(\operatorname{sen}^3 x) = 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot D(\operatorname{sen} x) = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$

4) $D(\operatorname{sen}^5 4x^3) = 5 \operatorname{sen}^4 4x^3 \cdot \cos 4x^3 \cdot D(4x^3) = 60x^2 \operatorname{sen}^4 4x^3 \cos 4x^3$

105. Derivada de la función $y = \cos x$. — Como

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

el problema se reduce a hallar la derivada de una función de función,

$$y = \operatorname{sen} u \quad \text{siendo} \quad u = \frac{\pi}{2} - x$$

Tendremos:

$$D(\cos x) = D\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot D\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= \operatorname{sen} x \cdot (-1) = -\operatorname{sen} x$$

o sea,

$$\boxed{y' = -\operatorname{sen} x}$$

La derivada de la función y = *cos* x *es* y′ = −*sen* x.

Cuando se trate de la función de función $y = \cos u$, siendo $u = f(x)$, tendremos que $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, es decir,

$$\boxed{D(\cos u) = -\operatorname{sen} u \cdot Du}$$

EJEMPLOS: 1) $D(\cos 2x^3) = -\operatorname{sen} 2x^3 \cdot D(2x^3) = -6x^2 \operatorname{sen} 2x^3$

2) $D(\cos^2 x) = 2\cos x \cdot D(\cos x) = -2\cos x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x$

3) $D[\cos^3(a^2 - 2x^5)] = -3\cos^2(a^2 - 2x^5)\operatorname{sen}(a^2 - 2x^5)(-10x^4) =$
$= 30x^4 \cos^2(a^2 - 2x^5)\operatorname{sen}(a^2 - 2x^5)$

106. Derivada de la función $y = \operatorname{tg} x$. — Por ser

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

podemos obtener la derivada pedida derivando este cociente. Se tiene:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

es decir,

$$\boxed{y' = \frac{1}{\cos^2 x}} \quad \text{o, también,} \quad \boxed{y' = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

La derivada de la función y = *tg* x *es* $y' = \dfrac{1}{cos^2\,x} = sec^2\,x$.

Si fuera $y = \operatorname{tg} u$, siendo $u = f(x)$, tendremos que $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, o sea,

$$\boxed{D(\operatorname{tg} u) = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot Du = \sec^2 u \cdot Du}$$

EJEMPLOS: 1) $D(\operatorname{tg}^4 x) = 4\operatorname{tg}^3 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}$

2) $D(\ln \operatorname{tg} 5x^2) = \dfrac{D(\operatorname{tg} 5x^2)}{\operatorname{tg} 5x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 5x^2} \cdot D(5x^2)}{\operatorname{tg} 5x^2} =$

$$= \frac{10x}{\cos^2 5x^2 \operatorname{tg} 5x^2} = \frac{10x}{\cos 5x^2 \operatorname{sen} 5x^2} = \frac{10x}{\frac{1}{2}\operatorname{sen} 10x^2} = \frac{20x}{\operatorname{sen} 10x^2}$$

3) $D(\operatorname{tg}^3 2x^5) = 3\operatorname{tg}^2 2x^5 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 2x^5} \cdot 10x^4 = \dfrac{30x^4 \operatorname{sen}^2 2x^5}{\cos^4 2x^5}$

107. Derivada de la función $y = \operatorname{cotg} x$. — Considerando que

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

para hallar la derivada pedida bastará derivar este cociente. Tenemos:

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

es decir,

$$\boxed{y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \qquad \text{o} \qquad \boxed{y' = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)}$$

La derivada de $y = cotg\, x$ *es* $y' = -\dfrac{1}{sen^2 x} = -cosec^2 x$.

Si fuera $y = \operatorname{cotg} u$, siendo $u = f(x)$, tendremos que $y'_x = y'_u \cdot u_x$, o sea,

$$\boxed{D(\operatorname{cotg} u) = -\frac{1}{\operatorname{sec}^2 u} \cdot Du = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot Du}$$

EJEMPLOS: 1) $D(\operatorname{cotg} 3x^2) = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 3x^2} \cdot 6x = -\dfrac{6x}{\operatorname{sen}^2 3x^2}$

2) $D(\ln \operatorname{cotg} x) = \dfrac{-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{cotg} x} = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x} = -\dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x}$

Análogamente hallaríamos las derivadas de

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{y de} \quad y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

que son $\boxed{y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x}$ e $\boxed{y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x}$

108. Funciones circulares inversas. — En las funciones trigonométricas que acabamos de ver, la variable independiente es el arco. Pero existen además otras funciones circulares, tales como $y = \operatorname{arc\,sen} x$, $y = \operatorname{arc\,cos} x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$, etc., en las que el arco es la función. Estas funciones, llamadas también *ciclométricas*, son, por tanto, inversas de las anteriores.

Nos limitaremos a hallar las derivadas de

$$y = \operatorname{arc\,sen} x, \qquad y = \operatorname{arc\,cos} x, \qquad y = \operatorname{arc\,tg} x$$

El significado de estas funciones es el siguiente:

$y = \operatorname{arc\,sen} x$ significa que y es el arco cuyo seno es x.
$y = \operatorname{arc\,cos} x$ significa que y es el arco cuyo coseno es x.
$y = \operatorname{arc\,tg} x$ significa que y es el arco cuya tangente es x.

109. Derivada de $y = \operatorname{arc\,sen} x$. — Esta función es la inversa de

$$x = \operatorname{sen} y \quad \text{cuya derivada es} \quad x' = \cos y$$

Aplicando la propiedad de las derivadas de las funciones inversas, tenemos

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y}$$

y como

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

resulta, finalmente,

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \text{o} \qquad \boxed{D(\operatorname{arc\,sen} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot Du}$$

EJEMPLO. — $D\,(\text{arc sen}\,\sqrt{x}) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

110. Derivada de $y = \text{arc cos}\,x$. — Esta función es la inversa de

$$x = \cos y \quad \text{cuya derivada es} \quad x' = -\operatorname{sen} y$$

Luego,

$$y' = \frac{1}{x'} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

es decir,

$$\boxed{y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \text{o} \qquad \boxed{D\,(\text{arc cos}\,u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot Du}$$

EJEMPLO. — $D\left(\text{arc cos}\,\dfrac{x}{a}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\cdot\dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

111. Derivada de $y = \text{arc tg}\,x$. — Esta función es la inversa de

$$x = \operatorname{tg} y \quad \text{cuya derivada es} \quad x' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y$$

Luego,

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

es decir,

$$\boxed{y' = \frac{1}{1+x^2}} \qquad \text{o} \qquad \boxed{D\,(\text{arc tg}\,u) = \frac{1}{1+u^2}\cdot Du}$$

EJEMPLO:

$$D\,[\text{arc tg}\,(2x-4)] = \frac{1}{1+(2x-4)^2}\cdot D\,(2x-4) = \frac{2}{2x^2-16x+17}$$

EJERCICIOS

226. Hallar las derivadas de las funciones:

1) $y = \operatorname{sen} 3x$
2) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$
3) $y = \operatorname{sen} x^2$
4) $y = \operatorname{sen} 3x^2$
5) $y = \operatorname{sen}^2 x$
6) $y = \operatorname{sen}^2 2x$
7) $y = \operatorname{sen} ax^2$
8) $y = \cos 5x$
9) $y = \cos 4ax$
10) $y = 3 \operatorname{tg} 2x$

227. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \operatorname{sen}(2x+3)$
2) $y = \cos(2-3x)$
3) $y = \operatorname{tg}(3x^2-1)$
4) $y = a(1-\operatorname{sen} x)$
5) $y = \cos(a-bx^n)$
6) $y = \operatorname{tg}(\frac{3}{4} x+1)$

228. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \operatorname{sen}^3 4x$
2) $y = \cos^2 3x^2$
3) $y = \operatorname{tg}^2 5x^3$
4) $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 2x^2$
5) $y = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$
6) $y = a\sqrt{\cos x^2}$
7) $y = \operatorname{tg} \sqrt{2x}$
8) $y = \operatorname{sen} \sqrt{1-3x}$

229. Hallar las derivadas de las funciones:

1) $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}$
2) $y = \operatorname{tg} \sqrt[5]{x^3}$
3) $y = \operatorname{cotg}^2 \sqrt{x}$
4) $y = (\operatorname{tg} \sqrt{x})^2$
5) $y = \cos \sqrt{x^2-a^2}$
6) $y = \sqrt{1-\cos x}$
7) $y = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$

230. Derivar las funciones:

1) $y = \operatorname{sen} x - x$
2) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$
3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$;
4) $y = \operatorname{sen} x \cos x$
5) $y = \operatorname{sen} x - x \cos x$
6) $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$
7) $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$
8) $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$
9) $y = x - \operatorname{sen} x \cos x$

231. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$
2) $y = \operatorname{sen}^3 x \cos x$
3) $y = \cos^3 x \operatorname{sen} x$
4) $y = \cos x (\operatorname{sen} x - \cos x)$
5) $y = 3x \operatorname{sen} x - (x^3-3) \cos x$
6) $y = \operatorname{sen}(5x+2) \cos(5x-2)$
7) $y = \operatorname{sen} x (\cos^2 x+2)$

232. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{a}$ 3) $y = \dfrac{\cos x}{x}$ 5) $y = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$

2) $y = \operatorname{tg} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 4) $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$ 6) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$

7) $y = \dfrac{\cos 2x + \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x - \operatorname{sen} 2x}$

233. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \operatorname{sen} \ln x$ 4) $y = \ln \operatorname{sen} \ln x$ 7) $y = \ln \dfrac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x + 2}$

2) $y = \ln \operatorname{sen} x$ 5) $y = \ln \operatorname{tg} 3x$ 8) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

3) $y = \ln x \operatorname{sen} \sqrt{x}$ 6) $y = \log \operatorname{cotg} x$ 9) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$

34. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = x^{\operatorname{tg} x}$ 3) $y = \operatorname{sen} e^x$ 5) $y = 2^{\ln \operatorname{sen} x}$ 7) $y = (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

2) $y = e^{\operatorname{sen} x}$ 4) $y = xe^{\cos x}$ 6) $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

235. Calcular las derivadas de las funciones:

1) $y = \operatorname{arc\,sen} 2x$ 4) $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x + 1}{x - 1}$ 7) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{1 + x^2}$

2) $y = \operatorname{arc\,tg} 3x$ 5) $y = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{3x^2 - 2}{5}$ 8) $y = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$

3) $y = \operatorname{arc\,cos} x^2$ 6) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x - 1}{1 - x}$ 9) $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{3x + 2}{2x + 3}$

236. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{\dfrac{x^3 + 9}{4x - 3}}$ en el punto de abscisa 3.

237. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = (x+2)(x-3)(x-5)$ en los puntos en que corta al eje de las x.

238. Determinar m para que la tangente a la curva $y = \sqrt{25 - x^2}$ en el punto de abscisa 4 sea perpendicular a la recta $y = mx$.

239. Determinar en qué puntos de la curva $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ la tangente tiene una inclinación de 45°.

240. ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 - 3x^2$ la tangente es paralela al eje de las x? ¿Y en qué puntos forma la tangente un ángulo de 45° con el eje de ordenadas?

15. Aplicaciones de las derivadas

112. Función creciente y función decreciente. — *Se dice que una función es* CRECIENTE *en un punto, cuando el incremento de la función tiene el mismo signo que el incremento de la variable, siempre que éste sea lo suficientemente pequeño* (fig. 50).

Es decir, una función $y = f(x)$ es creciente en el punto x_1, cuando se verifica lo siguiente:

$$\begin{array}{|l} \Delta y_1 > 0 \quad \text{si} \quad \Delta x_1 > 0 \\ \Delta y_1 < 0 \quad \text{si} \quad \Delta x_1 < 0 \end{array}$$

Se dice que una función es DECRECIENTE *en un punto, cuando el incremento de la función es de signo contrario al de la variable, siempre que éste sea lo suficientemente pequeño* (fig. 51).

O sea, para que la función $y = f(x)$ sea decreciente en el punto x_1 se ha de verificar:

$$\begin{array}{|l} \Delta y_1 < 0 \quad \text{si} \quad \Delta x_1 > 0 \\ \Delta y_1 > 0 \quad \text{si} \quad \Delta x_1 < 0 \end{array}$$

Una función se dice *creciente* o *decreciente en un intervalo* (a, b) si lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

Función monótona creciente se dice de aquella que es creciente en todo su campo de existencia; y *monótona decreciente* de la que es decreciente en todo su campo de existencia.

113. Crecimiento o decrecimiento de una función según el signo de su derivada. — Una de las aplicaciones más importantes de las derivadas es la determinación del crecimiento o decrecimiento de las funciones. En efecto:

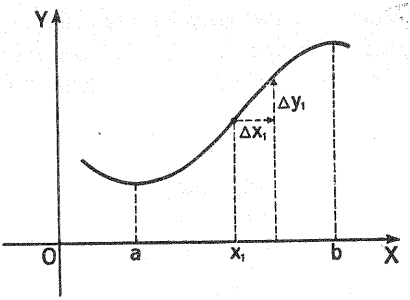

FIG. 50
Función *creciente* en el intervalo (a, b).

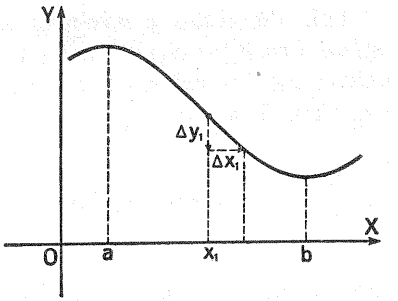

FIG. 51
Función *decreciente* en el intervalo (a, b).

Teniendo en cuenta que una fracción es positiva o negativa según que sus términos sean del mismo o de distinto signo, resulta que una función será creciente cuando el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sea positivo, y decreciente en el caso contrario. Ahora bien: como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

y, por otra parte, una sucesión de términos positivos no puede tener límite negativo, ni una sucesión de términos negativos puede tener límite positivo, podremos enunciar:

1.° *Una función es creciente en un intervalo cuando su derivada es positiva en dicho intervalo.*

2.° *Una función es decreciente en un intervalo cuando su derivada es negativa en dicho intervalo.*

Es decir:

> Si $f'(x) > 0$, la función $f(x)$ es creciente
> Si $f'(x) < 0$, la función $f(x)$ es decreciente

114. Máximos y mínimos absolutos. — Se llama *máximo absoluto* de una función al mayor valor que puede tomar la función, y *mínimo absoluto* al menor valor que puede tomar la función.

115. Máximos y mínimos relativos. — *Una función* f(x) *tiene un máximo relativo en un punto* x_1, *cuando el valor* $f(x_1)$ *de la función es mayor que los valores* $f(x_1+\Delta x_1)$ *próximos a él, ya sea* Δx_1 *positivo o negativo.* Esto es:

$$\text{Hay máximo cuando } f(x_1) > \begin{cases} f(x_1+\Delta x_1) \\ f(x_1-\Delta x_1) \end{cases}$$

con tal que Δx_1 sea lo suficientemente pequeño (fig. 52).

Una función f(x) *tiene un mínimo relativo en un punto* x_1, *cuando el valor* $f(x_1)$ *de la función es menor que los valores* $f(x_1+\Delta x_1)$ *próximos a él, ya sea* Δx_1 *positivo o negativo.* Es decir:

$$\text{Hay mínimo cuando } f(x_1) < \begin{cases} f(x_1+\Delta x_1) \\ f(x_1-\Delta x_1) \end{cases}$$

con tal que Δx_1 sea lo suficientemente pequeño (fig. 53).

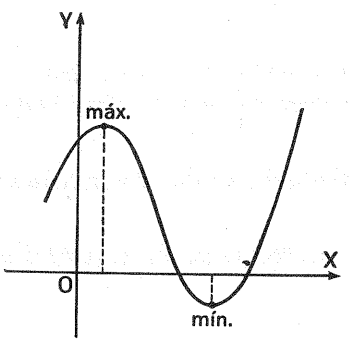

FIG. 52

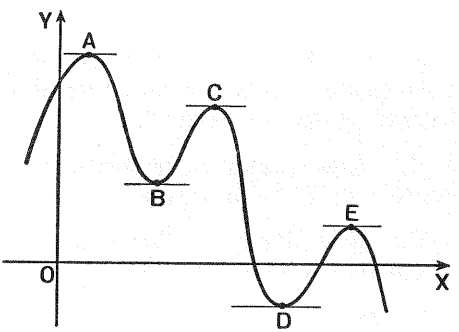

FIG. 53

Es necesario distinguir bien los máximos y mínimos absolutos de los relativos; aquéllos representan el valor máximo o mínimo de todos los que puede tomar la función, mientras que los máximos y mínimos relativos son los valores máximos o mínimos que cumplen las condiciones anteriormente dichas. Una función puede tener un máximo y un mínimo relativo a la vez, y hasta varios máximos y mínimos relativos; en este

último caso, puede ocurrir que exista un máximo que sea menor que un mínimo, y recíprocamente. Así, la función representada en la figura 53 tiene máximos en *A*, *C* y *E*, mientras que en *B* y *D* hay mínimos, siendo el mínimo en *B* mayor que el máximo en *E*.

116. Determinación de los máximos y mínimos de una función. — Supongamos representado en la figura 54 el intervalo (a, b) de una función $f(x)$, con un máximo en *M*.

Vemos que la función es creciente en el arco *AM* y, por consiguiente, en todos sus puntos la derivada $f'(x)$ será positiva; por el contrario, en el arco *MB* la función es decreciente y, en consecuencia, la derivada $f'(x)$ será negativa en todos los puntos del mismo.

Ahora bien: si la derivada $f'(x)$ es continua, como primero es positiva y luego negativa, tiene que pasar por todos los valores intermedios, es decir, necesariamente habrá de anularse, lo que ocurrirá precisamente en el punto *M*, ya que en él la función $f(x)$ no es creciente ni decreciente.

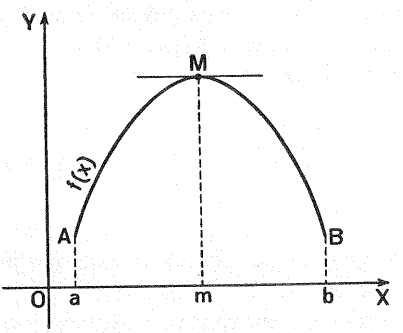

FIG. 54

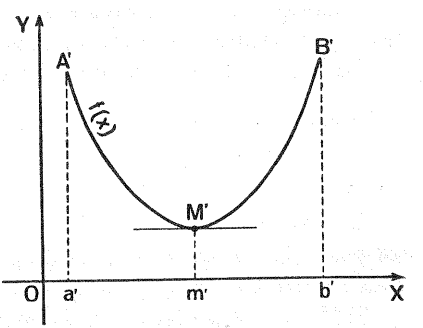

FIG. 55

Si existe un mínimo en el punto *M'* (fig. 55), el proceso es análogo, aunque en orden inverso: la función $f(x)$ pasa de decreciente a creciente, y la derivada $f'(x)$ pasa de negativa a positiva, anulándose ésta precisamente en el punto *M'*, en el cual la función $f(x)$ no es decreciente ni creciente.

Por todo lo cual, podemos enunciar:

La condición necesaria para que una función derivable $f(x)$ *tenga un máximo o un mínimo relativos en un punto* x_1, *es que la derivada* $f'(x_1)$ *en ese punto sea igual a cero. Gráficamente, esta condición se cumple cuando la tangente a la curva representativa de la función, en el punto* x_1 *es paralela al eje de abscisas* (figs. 53, 54 y 55).

Para poder determinar cuándo se trata de un máximo y cuándo de un mínimo, necesitamos ampliar el razonamiento. Acabamos de ver que si la función presenta un máximo, la derivada pasa de positiva a negativa; y si la función presenta un mínimo, la derivada de negativa pasa a positiva. Esto nos dice que cuando existe un máximo, la función derivada $f'(x)$ es decreciente, y, por el contrario, cuando hay un mínimo, $f'(x)$ es creciente. Luego, la derivada de esta derivada, es decir, *la derivada segunda* f''(x) *de la función dada será negativa cuando haya máximo, y positiva cuando haya mínimo.*

Resumiendo, tenemos:

$$f'(x_1) = 0 \begin{cases} \text{máximo} \\ \text{o} \\ \text{mínimo} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Si } f''(x_1) < 0, \text{ hay máximo} \\ \text{Si } f''(x_1) > 0, \text{ hay mínimo} \end{array}$$

Cuando $f''(x_1) = 0$, estamos ante un caso *dudoso:* puede ocurrir que haya un máximo, un mínimo o un punto de inflexión (ver 120).

De todo lo que precede se deduce la siguiente

REGLA. — *Para hallar los máximos y mínimos de una función* f(x):

1.° *Se halla su primera derivada, se iguala a cero y se determinan los valores de* x *que la anulan.*

2.° *Se calcula la derivada segunda y se reemplaza en ella* x *por los valores que anularon la derivada primera. Los que la hagan negativa producen máximos en* f(x); *y los que la hagan positiva, mínimos.*

Si f''(x) = 0, *o no existe, se halla* f'(x) *primero para un valor de* x *muy poco inferior y luego para un valor de* x *muy poco superior a cada una de las raíces reales que anulan a* f'(x). *Hecho esto, si* f'(x) *pasa de positiva a negativa, existe un máximo; si* f'(x) *pasa de negativa a positiva, existe un mínimo; y, finalmente, si* f'(x) *no cambia de signo, habrá un punto de inflexión.*

EJEMPLO. — Hallar los máximos y mínimos de la función $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$.

La derivada primera es $y' = 3x^2 - 6x - 45$

Igualemos esta expresión a cero y resolvamos la ecuación que resulta:

$$3x^2 - 6x - 45 = 0; \quad x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 + 540}}{6} = 5; \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 + 540}}{6} = -3$$

La derivada segunda es $y'' = 6x - 6$

Reemplacemos en esta función x por los valores antes obtenidos:

a) Para $x = 5$, resulta $y'' = 30 - 6 = 24$; $y'' > 0$

luego, existe un mínimo en la función dada para $x = 5$.

Para obtener el valor mínimo, sustitúyase x por 5 en $f(x)$, con lo cual se obtiene

$$y = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 45 \cdot 5 + 2 = -173$$

Por consiguiente, el punto de la curva correspondiente al mínimo es $M'(5, -173)$.

b) Para $x = -3$, se tiene $y'' = -18 - 6 = -24$; $y'' < 0$

luego, existe un máximo en $f(x)$ para $x = -3$, cuyo valor es

$$y = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 45(-3) + 2 = 83$$

Este máximo es el punto $M(-3, 83)$.

EJERCICIO. — Hállense los máximos y mínimos de $y = x(x-1)^3$.

117. Problemas de máximos y mínimos aplicados a la Geometría, a la Física, a la Técnica y a las Ciencias de la Naturaleza. — La teoría expuesta sobre máximos y mínimos encuentra numerosas aplicaciones en Geometría, Física, Química, Biología, Economía, Ingeniería y demás ciencias técnicas. Así, en Geometría se habla del área máxima con perímetro mínimo; en Economía, del máximo rendimiento con el mínimo gasto, etc.

El procedimiento general para resolver problemas de máximos y mínimos consiste en expresar por medio de una ecuación las condiciones establecidas en el enunciado del problema, considerando como variable dependiente o función a aquella magnitud cuyo máximo o mínimo quiere hallarse, y procurando que haya sólo una variable independiente. Conseguido esto, se calcula la primera derivada de la función, se iguala a cero y se halla el máximo o mínimo, después de sustituir los valores obtenidos en la segunda derivada, es decir, se empleará el método que ya conocemos.

A continuación presentamos algunos ejemplos.

PROBLEMA 1.º — *Descomponer un número en dos sumandos cuyo producto sea máximo.*

Sea a el número dado. Si representamos por x a uno de los sumandos, el otro será $a - x$, y su producto, $x\,(a-x)$. Queremos hallar el valor de x que hace tomar un valor máximo a la función

$$y = x\,(a-x) = ax - x^2$$

Hallando la primera derivada, igualando a cero y resolviendo, tenemos:

$$y' = a - 2\,x; \qquad a - 2\,x = 0 \quad \text{de donde} \quad x = \frac{a}{2}$$

Y como $y'' = -2$, es negativa para cualquier valor de x, resulta que para $x = \frac{a}{2}$ corresponde un máximo.

Luego, *para descomponer un número en dos sumandos cuyo producto sea máximo, basta dividirlo por dos.*

CONSECUENCIA. — Como consecuencia de la anterior deducción diremos que, *de todos los rectángulos de igual perímetro, el que tiene mayor área es el cuadrado.*

PROBLEMA 2.º — *Descomponer un número en dos factores positivos cuya suma sea mínima.*

Sea a el número en cuestión. Si uno de los factores es x, el otro será $\frac{a}{x}$, y su suma, $x + \frac{a}{x}$. Hemos de hallar el valor de x para el cual pasa por un mínimo la función

$$y = x + \frac{a}{x}$$

Se tiene:

$$y' = 1 - \frac{a}{x^2}; \qquad 1 - \frac{a}{x^2} = 0 \quad \text{de donde} \quad x = \sqrt{a}$$

La derivada segunda es

$$y'' = \frac{2\,a}{x^3}$$

Sustituyendo en ella x por $\sqrt{a}$, resulta

$$y'' = \frac{2\,a}{\sqrt{a^3}} = \frac{2}{\sqrt{a}} > 0$$

luego, en la función primera existe un mínimo para $x = \sqrt{a}$.

Uno de los factores es, por tanto, $\sqrt{a}$, y el otro será $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$; o sea, que los dos son iguales. Según esto, diremos: *para descomponer un número en dos factores, cuya suma sea mínima, bastará descomponerlo en dos factores iguales.*

CONSECUENCIA. — *De todos los rectángulos de igual área, el cuadrado es el que tiene menor perímetro.*

PROBLEMA 3.º — *Disponemos de una chapa metálica y deseamos construir un depósito abierto de base cuadrada y cuya capacidad sea* 864 *litros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del depósito para que su superficie y, por consiguiente, la cantidad de chapa empleada sea mínima?*

Sea x el lado de la base, y h la altura del depósito.

De la igualdad $\quad 864 = x^2 \cdot h \quad$ se deduce $\quad h = \dfrac{864}{x^2}$

La superficie del depósito mide

$$A = x^2 + 4x \cdot \frac{864}{x^2} = x^2 + \frac{3.456}{x}$$

Hallando la derivada primera de A, resulta

$$A' = 2x - \frac{3.456}{x^2}$$

Igualando a cero y resolviendo la ecuación,

$$2x - \frac{3.456}{x^2} = 0 \quad \text{de donde} \quad x = 12$$

La derivada segunda de A es

$$A'' = x + \frac{3.456 \cdot 2x}{x^4} = x + \frac{6.912}{x^3}$$

que para $x = 12$ toma el valor

$$A'' = 12 + \frac{6.912}{12^3} = 12 + 4 = 16 > 0$$

Luego, la superficie del depósito es mínima cuando $x = 12$ dm. Es decir que, las dimensiones pedidas son 12 dm., 12 dm. y $\dfrac{864}{12^2} = 6$ dm.

Si resolvemos el problema en general, veremos que h ha de ser siempre igual a la mitad de x. Compruébelo el alumno.

PROBLEMA 4.º — *¿Para qué valor de la altura es máximo el volumen de un cono inscrito en una esfera de* 15 *cm. de radio?*

Sea x la altura que buscamos (fig. 56). El volumen del cono en cuestión es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot x$$

Demos r en función de x y del radio de la esfera. Por ser r media proporcional entre los segmentos VD y DC, tendremos

$$\frac{x}{r} = \frac{r}{2R - x} \quad \text{de donde} \quad r^2 = x(30 - x)$$

Luego,

$$V = \tfrac{1}{3}\pi x(30 - x)x = \tfrac{1}{3}\pi(30x^2 - x^3)$$

Derivando esta función, resulta

$$V' = \tfrac{1}{3}\pi(60x - 3x^2) = \pi(20x - x^2)$$

Igualando a cero y dividiendo por π, se tiene

$$20x - x^2 = 0 \quad \text{de donde} \quad x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = 20$$

El valor $x = 0$ hay que desecharlo dada la índole del problema.

La derivada segunda de V es

$$V'' = \pi(20 - 2x) \quad \text{que para } x = 20 \text{ toma el valor } V'' = -20\pi$$

Por tanto, el volumen del cono es máximo cuando la altura mide 20 cm.

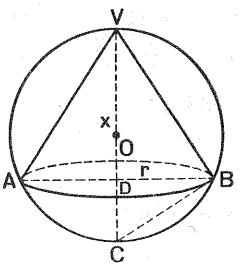

FIG. 56

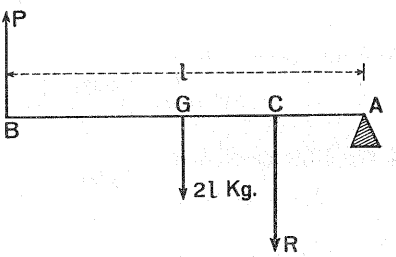

FIG. 57

PROBLEMA 5.º — *Se quiere levantar un peso* R *de* 400 *Kg. empleando una palanca homogénea de segundo género, cuyo peso en kilogramos es igual al doble de su longitud en metros. Si el peso* R *se halla suspendido de un punto distante* 1 *metro del punto de apoyo* A, *¿cuál habrá de ser la longitud de la palanca para que el esfuerzo sea mínimo?*

Sea la palanca AB, y designemos por l su longitud (fig. 57). La potencia P ha de vencer la resistencia $R = 400$ Kg., más el peso $2l$ Kg. de la palanca; la resistencia actúa en el punto C, a 1 metro de A, y el peso de la palanca lo hace en el

punto G, centro de gravedad de la palanca, situado en el punto medio de AB. Como el momento de la fuerza P, con respecto al punto de apoyo, ha de ser igual a la suma de los momentos de las otras dos fuerzas, tendremos:

$$P \cdot l = 400 \cdot 1 + 2\,l \cdot \frac{l}{2} = 400 + l^2$$

o bien, dividiendo por l,

$$P = \frac{400}{l} + l$$

Derivando esta función, igualando a cero y resolviendo la ecuación que resulta, se obtiene

$$P'(l) = \frac{-400}{l^2} + 1; \qquad \frac{-400}{l^2} + 1 = 0; \qquad l = \sqrt{400} = 20$$

pues la raíz negativa no tiene sentido.

La derivada segunda

$$P''(l) = \frac{400 \cdot 2\,l}{l^4} = \frac{800}{l^3}$$

es positiva para $l = 20$; luego, la longitud que ha de tener la palanca para que la potencia P sea mínima es de 20 metros.

PROBLEMA 6.° — *Una pila eléctrica de resistencia interna* r = 0'2 Ω *y de fuerza electromotriz* E = 1 *voltio, está unida a un circuito de resistencia* R. *Se desea saber el valor que ha de tener* R *para que la potencia* P *de la corriente suministrada sea máxima.*

Por la Física sabemos que

$$P = R \cdot I^2 \quad \text{e} \quad I = \frac{E}{R + r}; \qquad \text{es decir, será} \quad P = \frac{R \cdot E^2}{(R+r)^2}$$

Con los datos del problema, la última fórmula se transforma en

$$P = \frac{R}{(R+0'2)^2}$$

Derivando P respecto de R, se tiene

$$P' = \frac{(R+0'2)^2 \cdot 1 - R \cdot 2\,(R+0'2) \cdot 1}{(R+0'2)^4} =$$

$$= \frac{R^2 + 0'4\,R + 0'04 - 2\,R^2 - 0'4\,R}{(R+0'2)^4} = \frac{0'04 - R^2}{(R+0'2)^4}$$

Igualando a cero esta derivada y simplificando, resulta

$$0'04 - R^2 = 0 \quad \text{de donde} \quad R = \sqrt{0'04} = 0'2$$

pues no tiene sentido la raíz negativa.

La derivada segunda de P es

$$P'' = \frac{(R+0'2)^4 \cdot (-2R) - (0'04 - R^2) \cdot 4\,(R+0'2)^3 \cdot 1}{(R+0'2)^8} = \frac{2\,R^2 - 0'4\,R - 0'16}{(R+0'2)^5}$$

que para $R = 0'2$ toma el valor

$$P'' = -\frac{0'16}{0'4^5} = -\frac{1}{0'4^3} < 0$$

Por consiguiente, el valor de R que hace máxima la potencia de la pila es $R = 0'2\,\Omega$. En general, para que en una pila la potencia P sea máxima, ha de ser $R = r$.

EJERCICIOS

241. Averiguar si en el punto de abscisa 7 la curva $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+9}}$ es creciente o decreciente.

242. Dadas las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$, se pide: 1.º, averiguar si son crecientes o decrecientes; 2.º, hallar la ecuación de la tangente a cada una de esas curvas en el punto en que cortan a la recta $y = 8$.

243. Dada la función $y = 2\,x^3 - 6\,x^2 + 10$, determinar los intervalos en que es creciente y en los que es decreciente.

244. Dada la función $y = x^4 - 13\,x^2 + 3$, calcular los valores de x para los cuales se anula la función y aquéllos para los cuales alcanza un máximo y un mínimo.

245. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = x^3 - 3\,x^2 - 45\,x + 2$.

246. Determinar p y q de manera que la curva representativa de la función $y = x^2 + px + q$ contenga el punto $(-2, 1)$ y pase por un mínimo cuando $x = -3$.

247. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = 2\,x^3 - 21\,x^2 - 72\,x + 1$.

248. La función $y = ax^2 + bx + b$ se anula para $x = 1$ y tiene un mínimo para $x = 2$. Calcular el valor de los coeficientes a y b.

249. ¿Para qué valores de x, la función $y = e^x\,(2x^2 + x - 8)$ tiene un máximo o mínimo relativos? Hallar dichos valores máximo o mínimo de la función.

250. Dada la función $y = xe^{kx}$, en la cual k es una constante, determinar el valor de k, sabiendo que dicha función tiene un mínimo para el punto $x = 1$.

251. Descomponer el número 44 en dos sumandos, tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo.

252. Hallar cuál es el número positivo cuya suma con 25 veces su recíproco sea mínima.

253. Calcular la altura que debe tener un cilindro de revolución inscrito en una esfera que tiene 6 metros de diámetro, para que su volumen sea máximo entre todos los inscritos en ella.

254. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasando por el punto (1, 2) determina en las regiones positivas de los ejes un triángulo de área máxima?

255. De todos los triángulos isósceles cuya base y altura suman 20 metros, ¿qué base tiene el de área máxima?

256. Un recipiente cilíndrico de 1.570 litros de capacidad está cerrado por su base inferior y abierto por su base opuesta. El m^2 de material de pared cilíndrica cuesta el doble que la misma unidad de material del fondo. Calcular las dimensiones que debe tener este depósito para que sea mínimo el importe de los materiales empleados en su construcción.

257. De todos los cilindros de área lateral igual a 10 cm^2, ¿qué dimensiones tiene el de volumen máximo?

258. De todos los conos inscritos en la esfera de radio igual a 3 metros, hallar el de mayor volumen.

259. Un recinto está formado por un rectángulo y un semicírculo que tiene por diámetro uno de los lados del rectángulo. El área del recinto es de 5 m^2. Calcular las dimensiones para que el perímetro sea mínimo.

260. Hallar un punto sobre el eje de abscisas, tal que la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos (1, 2) y (4, 3) sea mínima.

261. Dada una circunferencia de diámetro 1'2 m., calcular el área del rectángulo máximo inscrito en ella.

262. Dos ciudades A y B están situadas a 10 y 15 Km. de un río (fig. 58). Debiendo aprovisionarse ambas ciudades de un mismo depósito D construído sobre el borde del río, ¿en qué punto debe encontrarse este depósito para que la longitud de los tubos de conducción sea mínimo? Se sabe que la proyección de la distancia AB sobre el borde del río es de 20 Km.

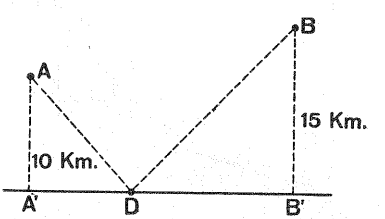

FIG. 58

16. Representación gráfica de funciones

118. Concavidad y convexidad. — Un arco presenta aspecto distinto según la región del plano desde el cual se le observe.

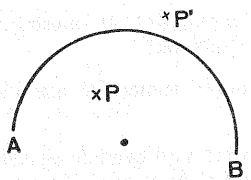

FIG. 59

Así, mirando desde P al arco AB (fig. 59), parece que sus puntos tienden a rodear al observador; por el contrario, si éste se coloca en P', tendrá la impresión de que los puntos de la curva tienden a alejarse. En el primer caso se dice que la curva es *cóncava* respecto del punto P, y en el segundo, que es *convexa* con relación al punto P'.

1) *Decimos que un arco vuelve su concavidad hacia las* Y *positivas, cuando sus puntos tienen ordenadas menores que las de los puntos de igual abscisa pertenecientes a cualquier cuerda.*

Ejemplo: el arco AB de las figuras 60 y 61, ya que la ordenada de un punto cualquiera P, perteneciente al arco, es menor que la del correspondiente de igual abscisa P', situado en la cuerda AB.

La función, en el intervalo representado por el arco que se considera, puede ser creciente (fig. 60) o decreciente (fig. 61). En ambos casos, se

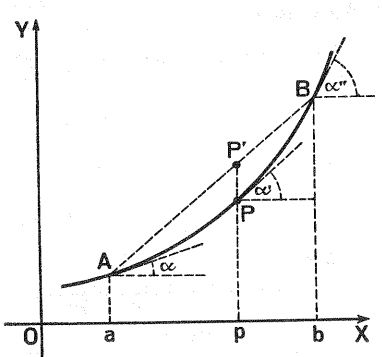

FIG. 60

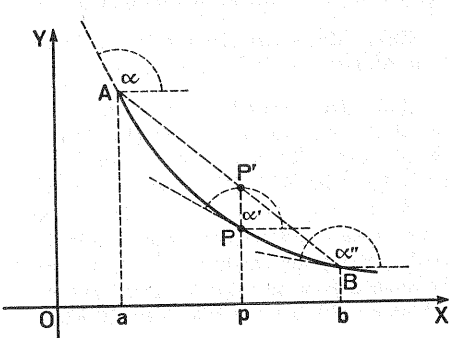

FIG. 61

observa que el ángulo formado por la tangente a la curva con la dirección positiva del eje OX, va creciendo a medida que crece la abscisa; en consecuencia, crece el coeficiente angular de dicha tangente,

$$\text{tg } \alpha < \text{tg } \alpha' < \text{tg } \alpha''$$

Y como estas tangentes trigonométricas son los distintos valores que va tomando la derivada y' de la función y, podemos afirmar que la primera derivada es una función creciente, por lo que, supuesta continua y derivable, la derivada segunda y'' deberá ser positiva en el intervalo considerado.

En resumen:

> Si la curva correspondiente a una función vuelve su concavidad hacia las Y positivas en un intervalo, en él:
>
> a) *La derivada primera es creciente.*
>
> b) *La derivada segunda es positiva.*

2) *Decimos que un arco vuelve su concavidad hacia las* Y *negativas, cuando sus puntos tienen ordenadas mayores que las de los puntos de igual abscisa pertenecientes a cualquier cuerda.*

Ejemplo: el arco AB de las figuras 62 y 63, pues la ordenada de un punto cualquiera P, perteneciente al arco, es mayor que la del correspondiente de igual abscisa P', situado en la cuerda AB.

Como en el caso anterior, la función, en el intervalo representado por el arco que se considera, puede ser creciente (fig. 62) o decreciente (figu-

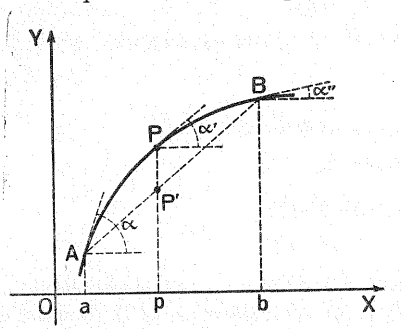

FIG. 62

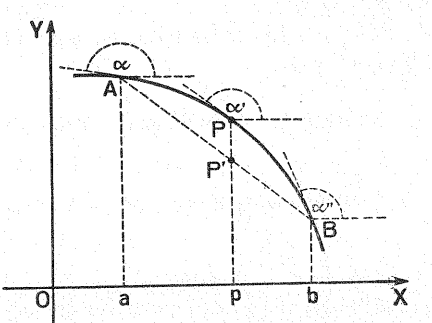

FIG. 63

ra 63). En ambos casos, se ve que el ángulo formado por la tangente a la curva con la dirección positiva del eje *OX*, va disminuyendo a medida que crece la abscisa; por tanto, decrece el coeficiente angular de dicha tangente,

$$\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha' > \operatorname{tg} \alpha''$$

Pero estas tangentes son los distintos valores que va tomando la derivada y'; luego, la derivada primera es una función decreciente, por lo que, supuesta continua y derivable, la derivada segunda tendrá que ser negativa en todo el intervalo.

En resumen:

> Si la curva correspondiente a una función vuelve su concavidad hacia las *Y* negativas en un intervalo, en él:
>
> a) *La derivada primera es decreciente.*
> b) *La derivada segunda es negativa.*

119. Regla para determinar el sentido de la concavidad. — El recíproco de las dos conclusiones hechas en el párrafo anterior es también cierto y, por tanto, podemos enunciar la siguiente regla:

Para determinar el sentido de la concavidad de una curva f(x), *se halla la derivada segunda* f''(x) *y los intervalos en los cuales es positiva o negativa:*

1) *En los intervalos en que* $f''(x) > 0$, *la curva es cóncava hacia las* Y *positivas.*

2) *En los intervalos en que* $f''(x) < 0$, *la curva es cóncava hacia las* Y *negativas.*

EJEMPLO 1.º — Estudiar el sentido de la concavidad de la curva

$$y = x^2 - 4x + 5$$

Hallando la primera y segunda derivadas, se obtiene

$$y' = 2x - 4; \qquad y'' = 2$$

Como y'' es positiva independientemente del valor de x, la curva vuelve su concavidad hacia las *Y* positivas en todo el campo de existencia de la función, es decir, en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

EJEMPLO 2.º — Determinar el sentido de la concavidad de la curva

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x$$

Tenemos: $y' = x^2 - 3x - 10$; $y'' = 2x - 3$

De $2x - 3 = 0$ se deduce $x = \frac{3}{2}$

Si $x < \frac{3}{2}$, $y'' < 0$; luego, la curva es cóncava hacia las Y negativas en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

Si $x > \frac{3}{2}$, $y'' > 0$; luego, la curva es cóncava hacia las Y positivas en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

120. Puntos de inflexión. — *Se denomina punto de inflexión aquel en que tiene lugar el cambio de sentido de la concavidad de una curva,* es decir, al punto en que la curva deja de ser cóncava hacia las Y positivas para pasar a serlo hacia las Y negativas, o viceversa. La tangente a la curva en el punto de inflexión queda dividida por él en dos partes, que quedan a distinto lado de la curva (figs. 64 y 65).

Como sabemos por los párrafos anteriores, si un arco de curva es cóncavo hacia las Y positivas, $f''(x) > 0$; y si lo es hacia las Y negativas, $f''(x) < 0$. Por consiguiente, $f''(x)$, supuesta continua, debe anularse al pasar de positiva a negativa (fig. 64), o viceversa (fig. 65).

De ahí que digamos: *La condición necesaria para que un punto* x_1 *de una curva sea de inflexión es que en él se anule la derivada segunda,* $f''(x_1) = 0$.

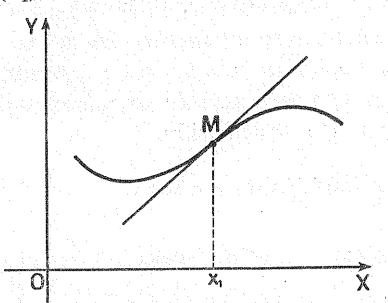

FIG. 64

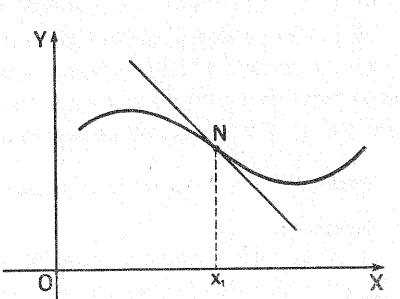

FIG. 65

Esta condición es necesaria pero no suficiente, puesto que puede ocurrir que haya algún valor de x que anule la derivada segunda y sin embargo no corresponda para él un punto de inflexión. Tal sucede cuando para ese mismo valor de x se anula también la derivada tercera.

Un estudio análogo al realizado para los máximos y mínimos, permite establecer que habrá punto de inflexión si $f'''(x) \neq 0$.

En efecto: si para x_1 se anula $f''(x_1)$ y no lo hace $f'''(x_1)$, ésta será positiva o negativa: *a)* Si $f'''(x_1) > 0$, como $f'''(x)$ es la derivada de $f''(x)$, esta última será una función creciente en el punto x_1, pero como en él se anula, necesariamente ha de pasar de negativa a positiva, lo que significa que la función $f(x)$ cambia el sentido de la concavidad, es decir, tiene punto de inflexión.

b) En el caso de ser $f'''(x_1) < 0$, emplearíamos un razonamiento análogo.

Resumiendo, tenemos:

Si $f''(x_1) = 0$ y $f'''(x_1) \neq 0$, hay punto de inflexión

Lo expuesto da lugar a la siguiente

REGLA. — *Para determinar el punto o puntos de inflexión de una función* f(x):

1.° *Se halla la derivada segunda* f''(x), *se iguala a cero y se resuelve la ecuación que resulta.*

2.° *Se calcula la derivada tercera* f'''(x) *y se reemplaza en ella* x *por las raíces de la ecuación anterior. Si para alguno de estos valores no se anula* f'''(x), *la función* f(x) *tendrá uno o más puntos de inflexión.*

Si f'''(x) *es difícil de hallar, o no existe, o se anula para las raíces de* f''(x), *se calcula* f''(x) *primero para un valor de* x *muy poco inferior, y luego para un valor de* x *un poco superior a cada una de las raíces reales de* f''(x), *y si ésta cambia de signo, hay punto de inflexión.*

EJEMPLO 1.° — Determinar los puntos de inflexión de $y = \operatorname{sen} x$.

Tenemos:

$$y' = \cos x; \qquad y'' = -\operatorname{sen} x; \qquad y''' = -\cos x$$

De $-\operatorname{sen} x = 0$ se deduce $x = k\pi$, siendo $k = 0, 1, 2, \ldots$

Como $y''' = -\cos x$ no se anula para ninguno de estos valores de x, diremos que la función $y = \text{sen } x$ tiene puntos de inflexión en los de abscisa $x = k\pi$, siendo $k = 0, 1, 2, \ldots$

121. Puntos en el infinito. Asíntotas. — En una función se llaman *puntos en el infinito* o *puntos impropios* aquellos en los que la abscisa, o la ordenada, o ambas, tienden a infinito.

Podemos considerar los siguientes casos:

1.° Si $y \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow a$, se dice que la función se hace infinita para el valor $x = a$, o que contiene al punto (a, ∞). La recta $x = a$ se llama *asíntota* de la curva, y tiene la propiedad de que la curva se aproxima a ella tanto como se quiera, con solo tomar y lo suficientemente grande.

Por tanto: *para hallar las asíntotas paralelas al eje* OY, *basta determinar los valores finitos de* x *que hacen a* y *infinito.*

2.° Si $y \longrightarrow b$ cuando $x \longrightarrow \infty$, la función contiene al punto impropio (∞, b). La recta $y = b$ se llama también *asíntota* de la curva, y tiene la propiedad de que la curva se aproxima a ella tanto como se quiera, con solo tomar x lo suficientemente grande.

Para hallar las asíntotas paralelas al eje OX *se buscan los valores finitos de* y *que hacen a* x *infinito.*

3.° Si $y \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow \infty$, la curva contiene al punto impropio (∞, ∞). Entonces no hay asíntotas paralelas a los ejes; las asíntotas, si se dan, son oblicuas, y su determinación es complicada.

122. Determinación de simetrías. — 1) Si una función $y = f(x)$ toma valores iguales al sustituir x por números opuestos, la curva es simétrica respecto al eje YY', ya que al pertenecer a la curva el punto (x, y), también pertenece el $(-x, y)$. Esta relación se representa escribiendo

$$f(x) = f(-x)$$

y se dice que la función es *par.*

EJEMPLO. — Son funciones pares las siguientes:

$$y = x^2; \qquad y = 7x^2 - 3; \qquad y = 3x^4 - x^2 + 4; \qquad y = \cos x$$

2) Si en una función $y = f(x)$, al sustituir x por $-x$ el valor de y se convierte en $-y$, la curva es simétrica respecto al origen de coordenadas,

ya que al pertenecer a la curva el punto (x, y), también pertenece el $(-x, -y)$. Esta relación la expresamos escribiendo

$$f(-x) = -f(x)$$

y de la función se dice que es *impar.*

EJEMPLO. — Son funciones impares:

$y = 5x$; $y = x^3$; $y = 2x^3 - 3x$; $y = \operatorname{sen} x$; $y = \operatorname{tg} x$

En estos dos casos basta construir la gráfica para valores de x mayores que cero, pues el resto se obtiene por simetría.

3) Si es $y = \pm f(x)$, entonces la curva es simétrica respecto al eje XX', y basta construir la gráfica de la función $y = f(x)$. Ejemplo de función de esta clase es $y = \pm\sqrt{x^2-1}$.

123. Estudio y representación gráfica de algunas funciones sencillas. — Hasta ahora, cuando teníamos que construir la gráfica de una función, formábamos la tabla de valores dando valores arbitrarios a la variable independiente y hallando los correspondientes de la función. Siguiendo este procedimiento, es muy fácil que se nos pasen inadvertidos ciertos puntos de singular importancia para el trazado de la curva. Los conocimientos que acabamos de adquirir, referentes a máximos y mínimos, concavidad e inflexión, nos permiten hacer la representación gráfica de funciones con mucha mayor exactitud.

En el estudio y representación gráfica de funciones seguiremos siempre el mismo orden. Hay que determinar:

1.° *Los intervalos en que puede variar* x, *es decir, los valores de* x *para los cuales la función es real.*

2.° *Los valores que adquiere la función al hacer* $x = \pm\infty$.

3.° *Los puntos en que la curva corta a los ejes, o sea, las intersecciones de la curva con las rectas* $x = 0$ *e* $y = 0$.

4.° *Los máximos y mínimos de la función.*

5.° *Los intervalos en que la función es creciente o decreciente.*

6.° *Los puntos de inflexión.*

7.° *El sentido de la concavidad de la curva.*

8.° *El centro y demás elementos de simetría de la curva que sea fácil apreciar.*

Con los datos obtenidos se forma la tabla de valores que nos servirá para el trazado de la curva.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.° — *Estudio y representación gráfica de la función*

$$y = x^4 - 8x^2 + 7$$

Es *continua* para todo valor finito de x, ya que y toma siempre valores numéricos reales. Cuando $x = \pm\infty$, es $y = \infty$.

Al hacer $x = 0$, resulta $y = 7$. Significa esto, que la curva *corta al eje YY'* en el punto (0, 7).

Como la ecuación

$$x^4 - 8x^2 + 7 = (x^2 - 1)(x^2 - 7) = 0$$

tiene por raíces

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \sqrt{7} \quad \text{y} \quad x_4 = -\sqrt{7},$$

la curva *cortará al eje XX'* en los puntos (1, 0), (−1, 0), $(\sqrt{7}, 0)$ y $(-\sqrt{7}, 0)$.

Calculando las tres primeras derivadas, se obtiene:

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2)$$
$$y'' = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4)$$
$$y''' = 24x$$

Se anula la derivada y', cuando $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 2$; luego, por ser

$f'(0) = 0$;	$f''(0) = -16$;	$f(0) = 7$
$f'(-2) = 0$;	$f''(-2) = 32$;	$f(-2) = -9$
$f'(2) = 0$;	$f''(2) = 32$;	$f(2) = -9$

la curva tendrá un *máximo*, en el punto (0, 7), y dos *mínimos*, uno en el punto (−2, −9) y otro en el (2, −9).

En el intervalo:

1) $(-\infty, -2)$, $y' < 0$

luego, en él, la función es *decreciente*

2) $(-2, 0)$, $y' > 0$

luego, en él, la función es *creciente*

3) $(0, 2)$, $y' < 0$

luego, en él, la función es *decreciente*

4) $(2, \infty)$, $y' > 0$

luego, en él, la función es *creciente*

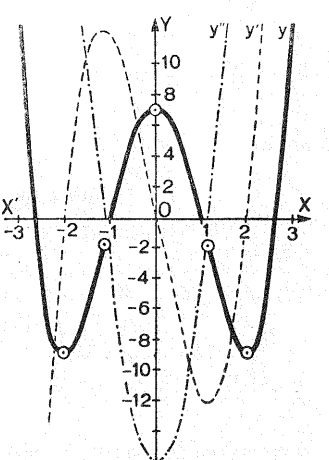

FIG. 66

La derivada segunda, $y'' = 4(3x^2 - 4)$, se anula para $x = \pm 2\sqrt{\frac{1}{3}}$, en cuyo caso, $y = f(\pm 2\sqrt{\frac{1}{3}}) = -\frac{17}{9}$ e $y''' = f'''(\pm 2\sqrt{\frac{1}{3}}) = \pm 48\sqrt{\frac{1}{3}}$. Habrá, en consecuencia, *dos puntos de inflexión:*

$$(2\sqrt{\tfrac{1}{3}},\ -\tfrac{17}{9}) \qquad \text{y} \qquad (-2\sqrt{\tfrac{1}{3}},\ -\tfrac{17}{9})$$

Por ser y'' positiva en los intervalos $(-\infty,\ -2\sqrt{\frac{1}{3}})$ y $(2\sqrt{\frac{1}{3}},\ \infty)$, la curva correspondiente a la función dada tendrá en ellos la *concavidad* hacia las Y positivas; mientras que, por ser negativa y'' en el intervalo $(-2\sqrt{\frac{1}{3}},\ 2\sqrt{\frac{1}{3}})$, la concavidad de la curva en él será hacia las Y negativas.*

Como se trata de una función *par*, la curva será *simétrica respecto del eje YY'*.

Resumen de los resultados obtenidos

x	y'	y''	y	
$-\infty$			∞	
$-\sqrt{7}$	$-$	$+$	concavidad positiva: 0	decrece
-2	0	$+32$	-9 *(mínimo)*	
$-2\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+$	0	$-\frac{17}{9}$ *(p. inflexión)*	
-1	$+$	$-$	0	
0	0	-16	concavidad negativa: 7 *(máximo)*	crece
1	$-$	$-$	0	
$2\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-$	0	$-\frac{17}{9}$ *(p. inflexión)*	
2	0	$+32$	-9 *(mínimo)*	decrece
$\sqrt{7}$	$+$	$+$	concavidad positiva: 0	
∞			∞	crece

Tabla de valores para construir la gráfica

Si $x =$	-3	$-\sqrt{7}$	-2	$-2\sqrt{\frac{1}{3}}$	-1	0	1	$2\sqrt{\frac{1}{3}}$	2	$\sqrt{7}$	3
$y =$	16	0	-9	$-\frac{17}{9}$	0	7	0	$-\frac{17}{9}$	-9	0	16
$y' =$			0	12'3	12	0	-12	$-12'3$	0		
$y'' =$			32	0	-4	-16	-4	0	32		

Figura 66

(*) En lo sucesivo diremos, para abreviar, *concavidad positiva* y *concavidad negativa*, en lugar de concavidad hacia las Y positivas y concavidad hacia las Y negativas, respectivamente.

EJEMPLO 2.° — *Estudio y representación gráfica de* $y = \frac{3^x}{4}$.

Se trata de una función *exponencial* cuya base es *mayor* que 1.

Al hacer $x = 0$, resulta $y = \frac{1}{4}$; lo cual quiere decir que la curva *corta al eje* YY' en el punto $(0, \frac{1}{4})$.

El no anularse y para ningún valor finito de x, significa que la curva *no corta al eje* XX'.

Las tres primeras derivadas son:

$$y' = \frac{3^x \ln 3}{4}; \qquad y'' = \frac{3^x (\ln 3)^2}{4}; \qquad y''' = \frac{3^x (\ln 3)^3}{4}$$

En la expresión que nos da la derivada primera, vemos que el factor 3^x es siempre positivo, cualquiera que sea el valor de x; de igual modo, se ve que ln 3 es positivo, ya que $3 > 1$. Luego, la derivada y' es también positiva, y, en consecuencia, la función es *siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.*

Igualmente, la derivada segunda es constantemente mayor que cero, por lo que podemos afirmar que la *concavidad* de la curva es *siempre positiva* y, al no anularse y'', diremos que *no hay* en la curva *puntos de inflexión.*

Finalmente, por ser

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim \frac{3^x}{4} = 0$$

la recta $y = 0$ (eje de abscisas) será *asíntota* de la curva.

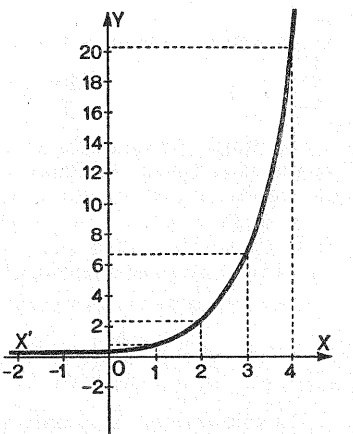

FIG. 67

Resumen de los resultados obtenidos

x	y'	y''	y
$-\infty$			0
crece	+	+	crece
0	$\frac{1}{4}\ln 3$	$\frac{1}{4}(\ln 3)^2$	$\frac{1}{4}$
crece	+	+	crece
1	$\frac{3}{4}\ln 3$	$\frac{3}{4}(\ln 3)^2$	$\frac{3}{4}$
crece	+	+	crece
∞			∞

concavidad positiva

Tabla de valores para construir la gráfica

Si $x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y =$	$\frac{1}{324}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{81}{4}$

Figura 67

EJEMPLO 3.º — *Estudio y representación gráfica de* $y = \log_a x$.

Como vemos, se trata del estudio de la variación de la función *logarítmica.* Ahora bien: la función logarítmica es inversa de la función exponencial, y, por consiguiente, la variación de aquélla puede deducirse de la de ésta.

Tenemos, en efecto, que

$$y = \log_a x \quad \text{es equivalente a} \quad x = a^y$$

y, por tanto, si suponemos que $a > 1$, resultará en ambas:

$$\lim_{x \to 0} y = -\infty; \qquad \lim_{x \to \infty} y = +\infty$$

El campo de variación de x se limita a los números positivos, ya que únicamente ellos tienen logaritmo real. Es decir, que la función está definida sólo en el intervalo $(0, \infty)$, siendo *continua* en él.

Cuando $x = 1$, $y = 0$; luego, la curva *corta al eje XX'* en el punto $(1, 0)$. Si $x = a$, será $y = 1$, es decir, la curva pasa por el punto $(a, 1)$.

Como x no puede anularse, la curva *no cortará al eje YY'.*

Las tres primeras derivadas son:

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \qquad y'' = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln a}; \qquad y''' = \frac{2}{x^3 \cdot \ln a}$$

La primera, y', es siempre positiva, por serlo los factores x y $\ln a$. Esto significa que la curva es *constantemente creciente,* sin que haya *máximos ni mínimos.*

La segunda y'', es siempre negativa, por lo que la curva representativa de la función y, tendrá siempre la *concavidad* de ese mismo signo.

Al no anularse y'', *no habrá puntos de inflexión* en la curva.

El eje de ordenadas es *asíntota* de la curva, ya que al tender x a cero, tiende y a $-\infty$.

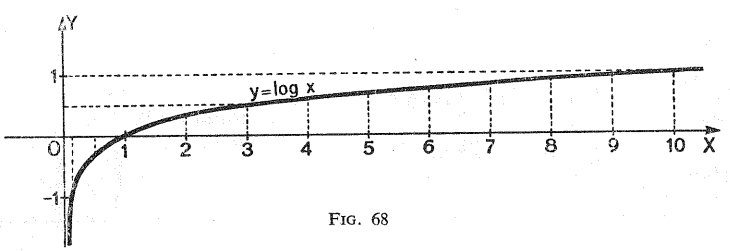

FIG. 68

Resumen de los resultados obtenidos

x	y′	y″	y
0			$-\infty$
crece	+	−	crece
1	$\frac{1}{\ln a}$	$-\frac{1}{\ln a}$	0
crece	+	−	crece
a	$\frac{1}{a \ln a}$	$-\frac{1}{a^2 \ln a}$	1
crece	+	−	crece
∞			∞

concavidad negativa

Tabla de valores, en el caso particular de ser $a = 10$

Si $x =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y =$	−0'9	−0'6	−0'3	0	0'3	0'5	0'6	0'7	0'8	0'84	0'9	0'95	1

Figura 68

EJEMPLO 4.º — *Estudio y representación gráfica de* $y = \cos 2x$.

Esta función queda perfectamente determinada para cualquier valor finito de x: es *continua* en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Se trata de una función *periódica* cuyo período es π; bastará, pues, estudiar su variación en el intervalo $(0, \pi)$.

Si hacemos $x = 0$, resulta $y = 1$; luego, la curva *corta al eje YY′* en el punto (0, 1).

Por otra parte, la ecuación $\cos 2x = 0$, da para x las soluciones $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$; significa esto que las *intersecciones de la curva con el eje XX′* (en el intervalo que estudiamos), son los puntos $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$

Las tres primeras derivadas son:

$$y' = -2 \operatorname{sen} 2x; \qquad y'' = -4 \cos 2x; \qquad y'' = 8 \operatorname{sen} 2x$$

La primera, y', toma signo negativo para valores de x comprendidos en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, por lo que la función es *decreciente* en dicho intervalo.

Por el contrario, y' es positiva en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, razón por la cual la función será *crenciente* en él.

Se anula y', cuando $x = 0$ y $x = \pi$, valores para los cuales la derivada segunda se hace igual a -4; por consiguiente, la función tendrá *dos máximos,* uno en el punto (0, 1) y otro en el punto (π, 1).

Asimismo, se anula y' cuando $x = \frac{\pi}{2}$, tomando entonces y'' el valor positivo 4; indica esto que la función pasa por un *mínimo* en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$

Por otra parte, la derivada segunda se anula para $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3\pi}{4}$; como para esos mismos valores la derivada tercera no se anula, y la función dada se hace igual a 0, los puntos $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$, en los que la curva corta al eje XX', son *puntos de inflexión.*

La *concavidad* de la curva es *negativa* en los intervalos $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ pues en ellos la derivada segunda es negativa.

Por el contrario, el hecho de ser y'' positiva en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ significa que en él la concavidad de la curva es *positiva.*

Resumen de los resultados obtenidos

x	$y' = -2 \operatorname{sen} 2x$	$y'' = -4 \cos 2x$	y = cos 2x	
0	0	−4	concavidad negativa: 1 *(máximo)*	
.....	−	−	.....	
$\frac{\pi}{4}$	−2	0	0 *(inflexión)*	decrece
.....	−	+	.....	
$\frac{\pi}{2}$	0	+4	concavidad positiva: −1 *(mínimo)*	
.....	+	+	.....	
$\frac{3\pi}{4}$	+2	0	0 *(inflexión)*	crece
.....	+	−	concavidad negativa:	
π	0	−4	1 *(máximo)*	

Tabla de valores para construir la gráfica

Si $x =$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$y =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Figura 69

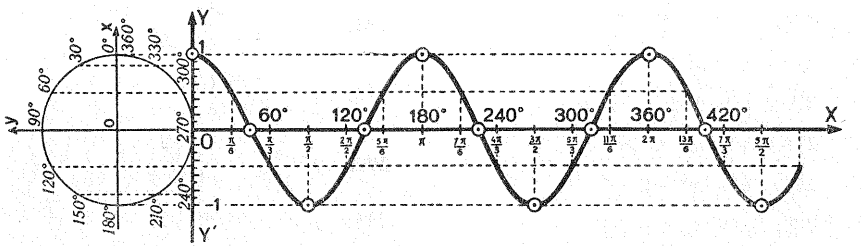

FIG. 69

EJERCICIOS

263. Calcular los puntos en que la función $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ presenta máximo, mínimo o inflexión. Comprobar que los tres puntos están alineados.

264. Hallar los puntos de inflexión de la curva $y = 12x^2 - 6x$. ¿Cuál es la pendiente en cada uno de ellos?

265. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$, calcular los valores de x para los cuales alcanza un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. ¿En qué intervalos de x es creciente o decreciente?

266. Hallar los puntos en los que la función $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1$ pasa por un máximo, por un mínimo o por un punto de inflexión.

267. Calcular los valores de x para los cuales la función $y = (3-x)^2(x-2)$ se anula, alcanza un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

268. En la curva $y = x^4 - 6x^2 + 9$, determinar los puntos de inflexión y los intervalos en que la curva es cóncava hacia las Y positivas o hacia las Y negativas.

269. ¿Para qué valor de x presenta la curva $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ un punto de inflexión y cuál es la ecuación de la tangente a la curva en ese punto?

270. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ en su punto de inflexión.

Estudiar la variación de las siguientes funciones y construir la gráfica correspondiente a cada una de ellas:

271. $y = ax + b$

272. $y = x^2 + 1$

273. $y = -x^2 + 3$

274. $y = x^2 - 2x + 2$

275. $y = 3x^2 + 2x + 1$

276. $y = ax^2 + bx + c$

277. $y = x^3 - 2$

278. $y = -x^3 + 2x$

279. $y = x^3 - x^2 + x - 1$

280. $y = 2x^3 - 9x^2 + 24x$

281. $y = (x^2 - x + 1)(x - 2)$

282. $y = x^4 - 16$

283. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

284. $y = \dfrac{1 + x}{x}$

285. $y = \dfrac{2x}{x - 2}$

286. $y = x + \dfrac{1}{x}$

287. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

288. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

289. $y = x - 1 + \dfrac{2}{x}$

290. $y = \dfrac{10(x - 4)}{x^2 - 9}$

291. $y = \dfrac{1}{(x - 1)(x + 2)}$

292. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2}$

293. $y = \dfrac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$

294. $y = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2$

295. $y = \sqrt{1 - x^2}$

296. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

297. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

298. $y = x\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

299. $y = \dfrac{2^x}{5}$

300. $y = \dfrac{(\frac{1}{2})^x}{5}$

301. $y = \log(1 + x)$

302. $y = \ln(x - 1)$

303. $y = \operatorname{sen} x$

304. $y = \operatorname{sen} 2x$

305. $y = \cos x$

306. $y = \operatorname{tg} x$

307. $y = \operatorname{cotg} x$

308. $y = \operatorname{arc\,sen} x$

309. $y = \operatorname{arc\,tg} x$

310. $y = \cos x + \cos 2x$

17. Diferencial de una función

124. Concepto de diferencial de una función. — Si una función $y = f(x)$ tiene derivada en un punto, se cumple que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

y, por tanto, antes de pasar al límite, será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon \quad \text{de donde} \quad \Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x$$

Como se ve, el incremento de la función se compone de dos sumandos: el primero, $y'\Delta x$, se llama *diferencial de la función;* el segundo, $\varepsilon\Delta x$, es un infinitésimo de orden superior a Δx (*).

Diferencial de una función $y = f(x)$, *correspondiente al* Δx *de la variable independiente, es el producto de la derivada* y' *por dicho* Δx.

Se representa anteponiendo la letra *d* al símbolo empleado para designar a la función. Así, la diferencial de la función $y = f(x)$ se representa por dy, o por $df(x)$. Según esto, y de acuerdo con la definición anterior, pondremos

$$\boxed{dy = y'\Delta x}$$

125. Diferencial de la variable independiente. — Si tenemos la función $y = x$, como $y' = 1$, la diferencial será

$$dy = \Delta x \quad \text{o de esta forma} \quad \boxed{dx = \Delta x}$$

Luego: *la diferencial de la variable independiente* (dx) *es igual a su incremento* (Δx).

(*) Es decir, tal que su cociente por x tiende a cero (38, 2.°).

126. Otra expresión de la diferencial. — Dada la función $y = f(x)$, hemos dicho que $dy = y'\Delta x$. Ahora bien, sustituyendo Δx por su igual dx, se tiene: $dy = y'\,dx$.

La diferencial de una función es el igual al producto de la derivada de esa función por la diferencial de la variable independiente.

Dividiendo por dx los dos miembros de la anterior igualdad, resulta

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

expresión esta que justifica una de las notaciones empleadas para representar la derivada. Adviértase, sin embargo, que esta notación no es un mero símbolo, sino el cociente entre dos cantidades, dy y dx.

127. Interpretación geométrica de la diferencial. — Supongamos que AB (figs. 70 y 71) es la curva representativa de la función $y = f(x)$.

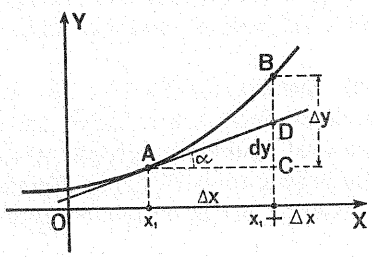

FIG. 70

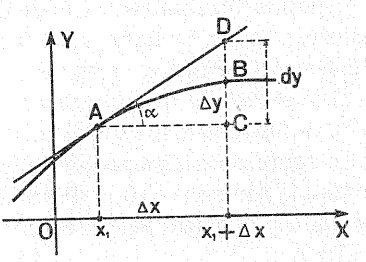

FIG. 71

Recordemos que, si y'_1 es la derivada de la función en el punto $A\,(x_1, y_1)$, será

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{\Delta x} \qquad \text{de donde} \qquad y' \cdot \Delta x = CD$$

y como $\Delta x = dx$, resulta: $y'\,dx = dy = CD$.

Es decir: *La diferencial de una función está representada por el incremento* dy *de la ordenada de la tangente, correspondiente a un incremento* Δx *de la abscisa del punto de tangencia.*

Es preciso no confundir dy con Δy; obsérvese en la figura cómo a un incremento Δx de la variable x corresponde en la función el incremento $\Delta y = CB$, mientras que la diferencial es $dy = CD$.

Asimismo, puede verse que la diferencia $\Delta y - dy$ disminuye al hacerlo Δx, y tiende a cero cuando $\Delta x \longrightarrow 0$.

EJEMPLO. — Hallar el incremento y la diferencial de la función $y = 3x^2$ para $x = 2$ e $\Delta x = 0'01$.

Tendremos:

$$\Delta y = 3(2+0'01)^2 - 3 \cdot 2^2 = 12'1203 - 12 = 0'1203$$
$$dy = 6\,x dx = 6 \cdot 2 \cdot 0'01 = 0'12$$

128. Fórmulas de diferenciación. — Siendo la diferencial de una función igual a la derivada por la diferencial de la variable independiente, el cálculo de diferenciales se reduce al cálculo de derivadas.

1) Diferencial de una suma de funciones.

De acuerdo con la definición de diferencial, se tiene

$$d(u+v+w) = (Du+Dv+Dw)\,dx$$

pero el producto de la derivada de una función por la diferencial de la variable independiente, es igual a la diferencial de la función; luego,

$$d(u+v+w) = du + dv + dw$$

2) Diferencial de un producto.

$$d(uvw) = D(uvw)\,dx = (Du\,v\,w + u\,Dv\,w + u\,v\,Dw)\,dx =$$
$$= du\,v\,w + u\,dv\,w + u\,v\,dw$$

3) Diferencial de un cociente.

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = D\left(\frac{u}{v}\right)dx = \frac{v\,Du - u\,Dv}{v^2}\,dx = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

4) Diferencial de la función potencial.

$$d(u^m) = D(u^m)\,dx = mu^{m-1}Du\,dx = mu^{m-1}du$$

5) Diferencial de una raíz.

$$d(\sqrt[n]{u}) = D(\sqrt[n]{u})\,dx = \frac{Du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\,dx = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

6) Diferencial de la función logarítmica.

$$d(\ln u) = D(\ln u)\,dx = \frac{Du}{u}\,dx = \frac{du}{u}$$

$$d(\log_a u) = D(\log_a u)\,dx = \frac{Du}{u}\log_a e\;dx = \frac{du}{u}\log_a e$$

7) Diferencial de la función exponencial.

$$d(a^u) = D(a^u)\,dx = a^u \ln a\;Du\;dx = a^u \ln a\;du$$
$$d(e^u) = D(e^u)\,dx = e^u Du\,dx = e^u du$$

8) Diferencial de la función seno.

$$d(\operatorname{sen} u) = D(\operatorname{sen} u)\,dx = \cos u\,Du\,dx = \cos u\,du$$

9) Diferencial de la función coseno.

$$d(\cos u) = D(\cos u)\,dx = -\operatorname{sen} u\,Du\,dx = -\operatorname{sen} u\,du$$

10) Diferencial de la función tangente.

$$d(\operatorname{tg} u) = D(\operatorname{tg} u)\,dx = \frac{1}{\cos^2 u}\,Du\,dx = \frac{du}{\cos^2 u} = \sec^2 u\,du$$

11) Diferencial de la función arc sen u.

$$d(\operatorname{arc\,sen} u) = D(\operatorname{arc\,sen} u)\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,Du\,dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

12) Diferencial de la función arc cos u.

$$d(\operatorname{arc\,cos} u) = D(\operatorname{arc\,cos} u)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,Du\,dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

13) Diferencial de la función arc tg u.

$$d(\operatorname{arc\,tg} u) = D(\operatorname{arc\,tg} u)\,dx = \frac{1}{1+u^2}\,Du\,dx = \frac{du}{1+u^2}$$

EJEMPLOS. — Calcular la diferencial de las funciones siguientes:

1.° $y = a^{\sqrt{x^2-1}}$

Se tiene: $u = \sqrt{x^2-1}$; $du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$; $dy = \dfrac{a^{\sqrt{x^2-1}} \ln a\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

2.º $y = e^{-3x}$

Se tiene: $u = -3x$; $du = -3\,dx$; $dy = -3\,e^{-3x}\,dx$

3.º $y = \operatorname{sen} 4x^2$.

Se tiene: $u = 4x^2$; $du = 8x\,dx$; $dy = 8x \cos 4x^2\,dx$

4.º $y = \operatorname{arc\,tg}(2x-1)^4$.

Se tiene: $u = (2x-1)^4$; $du = 8(2x-1)^3\,dx$; $dy = \dfrac{8(2x-1)^3\,dx}{1+(2x-1)^8}$

129. Error de una función. — Como es sabido, dada una función $y = f(x)$, a cada valor x_1 de la variable corresponde otro y_1 en la función.

En la práctica, sucede con frecuencia que el valor x_1 no puede darse exactamente, sino sólo de un modo aproximado. Así, por ejemplo, si x representa una longitud, x_1 será el resultado de una medida que, por la imperfección de los instrumentos empleados o por la inexactitud de las observaciones, no será exacto, sino aproximado con error menor que un centímetro, un milímetro, etc., pero nunca con absoluta exactitud. Igual sucederá cuando x represente un ángulo, un peso, tiempo, u otra variable cualquiera. En todos estos casos, aunque el resultado de la medida no es exacto, conocemos el límite o cota de error.

Teniendo esto en cuenta, tratemos de resolver el problema de hallar el límite o cota del error cometido en una función al tomar en la variable, como exacto, un valor aproximado cuyo límite o cota de error absoluto se conoce.

Si representamos por Δx el error de la variable, el que corresponde a la función será Δy, verificándose, como antes hemos visto (124), que

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x$$

Observemos que al ser Δx muy pequeño, el sumando $\varepsilon\Delta x$ será aún más pequeño, pues es un infinitésimo. Este producto se puede considerar como despreciable, por lo que podemos admitir como error de la función la expresión

$$\boxed{dy = y'\Delta x}$$

Es decir:

La diferencial de una función, calculada con una cota del error absoluto de la variable, representa una cota del error absoluto de la función.

La fórmula anterior permite aplicar al cálculo de errores absolutos de las distintas operaciones las fórmulas obtenidas para las diferenciales. Así, refiriéndonos a la suma, tendremos:

Para obtener una cota de error absoluto de una suma, se suman las cotas de los errores absolutos de los sumandos (*).

EJEMPLO 1.º — Dar una cota del error absoluto cometido al calcular $\sqrt{9} = 3$ en vez de $\sqrt{9'8}$.

Se tiene:

$$\Delta x = 9'8 - 9 = 0'8 < 1; \qquad D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Luego, el error cometido es menor que $\frac{1}{6}$.

EJEMPLO 2.º — Al medir el radio de un círculo con un doble decímetro hemos obtenido 4'7 cm., con error menor que un milímetro. Dar una cota del error absoluto cometido al calcular el área de ese círculo tomando por radio el hallado en la medida.

$$\Delta x = 0'1 \text{ cm.}; \qquad D(\pi r^2) = 2\pi r; \qquad \Delta y = 2\pi \cdot 4'7 \cdot 0'1 = 0'94\pi$$

Se comete un error menor que $0'94\pi$ cm^2.

130. Diferencial logarítmica. — Se llama *diferencial logarítmica* de una función $z = f(x)$, a la diferencial de su logaritmo neperiano, es decir, a la diferencial de la función $y = \ln f(x)$.

Pero, según (128, 6.º), la diferencial de $y = \ln f(x)$ es

$$dy = d[\ln f(x)] = D[\ln f(x)]\,dx = \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{dz}{z}$$

Luego: *La diferencial logarítmica de una función es igual a la diferencial de la función dividida por dicha función.*

Recibe el nombre de diferencial logarítmica de un producto, cociente o potencia de varias funciones, la diferencial del logaritmo neperiano de estas operaciones.

I. PRODUCTO. — Sea el producto de funciones

$$y = u\,v\,w$$

(*) Esta misma regla se aplica a la diferencia, pues generalmente, se desconoce el sentido de la aproximación del minuendo y del sustraendo.

Tomando logaritmos neperianos, resulta

$$\ln y = \ln u + \ln v + \ln w$$

y diferenciando esta suma de funciones,

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}$$

La diferencial logarítmica de un producto es igual a la suma de las diferenciales logarítmicas de los factores.

Si multiplicamos la expresión anterior por $y = u\,v\,w$, tendremos otra prueba de la fórmula obtenida para la diferencial de un producto (128, 2.°). En efecto, resulta

$$dy = du\,v\,w + u\,dv\,w + u\,v\,dw$$

II. COCIENTE. — Sea el cociente de dos funciones

$$y = \frac{u}{v}$$

Tomando logaritmos neperianos y diferenciando, se tiene:

$$\ln y = \ln u - \ln v; \qquad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$$

La diferencial logarítmica de un cociente es igual a la diferencial logarítmica del dividendo menos la diferencial logarítmica del divisor.

Multiplicando la última igualdad por $y = \frac{u}{v}$ tendremos otra comprobación de la fórmula obtenida para la diferencial de un cociente (128, 3.°). En efecto, resulta

$$dy = \frac{du\,u}{uv} - \frac{dv\,u}{v^2} = \frac{du\,u\,v^2 - dv\,v\,u^2}{uv^3} = \frac{du\,v - dv\,u}{v^2}$$

III. POTENCIA. — Análogamente, se tiene para una potencia:

$$y = u^m; \qquad \ln y = m \ln u; \qquad \frac{dy}{y} = m\frac{du}{u}$$

La diferencial logarítmica de una potencia es igual al exponente por la diferencial logarítmica de la base.

Multiplicando la última igualdad por $y = u^m$ se tiene una comprobación de la fórmula obtenida para la diferencial de una potencia (128, 4.º). En efecto,

$$dy = m\frac{u^m du}{u} = mu^{m-1}du$$

131. Error relativo. — Ya se dijo en otro lugar (11) que el error absoluto no nos da una idea clara de la aproximación con que ha sido obtenida una medida. Es preciso, por tanto, acudir al error relativo, que, en el caso de una función, se halla dividiendo el error absoluto, es decir, la diferencial, por la función misma:

$$E' = \frac{dy}{y} = \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$$

Pero este cociente no es sino la diferencial logarítmica de la función. Por consiguiente, podemos enunciar:

La diferencial logarítmica de una función, calculada para un valor por defecto de ésta, representa una cota del error relativo de la función.

Y como se pueden aplicar a los errores relativos las propiedades de las diferenciales logarítmicas, tendremos:

El error relativo de un producto es, prácticamente, igual a la suma de los errores relativos de los factores.

El error relativo de un cociente es la diferencia entre los errores relativos del dividendo y divisor. Análogamente a lo que dijimos en la nota de la pág. 176, puede suceder que se desconozca el signo de la aproximación, por lo cual, por si lo tuvieran contrario, se toma en la práctica como error relativo del cociente, la suma de los errores relativos del dividendo y divisor.

Y como siempre se sustituye el error absoluto por una cota de error, resulta en definitiva:

El error relativo de un producto (o cociente) admite como cota de error relativo la suma de las cotas de los errores relativos de los factores (o del dividendo y divisor).

Por la consideración de la diferencial logarítmica de una potencia, se deduce:

El error relativo de una potencia admite como cota de error relativo el producto del exponente por la cota del error relativo de la base, siendo

también aplicable la regla al caso de que el exponente sea fraccionario, es decir, cuando se trate de raíces.

132. Diferenciales sucesivas. — Así como hallábamos las derivadas sucesivas de una función, podríamos obtener las diferenciales sucesivas.

Si se quiere obtener la segunda diferencial de $y = f(x)$, basta considerar en

$$dy = y'dx$$

a dx como una constante y multiplicar la derivada de $y'dx$ (derivada del producto de una función por una constante) por la diferencial de la variable independiente, o sea,

$$d(y'dx) = D(y'dx)\,dx = y''dx \cdot dx = y''dx^2$$

o bien, representando por d^2y a la segunda diferencial,

$$d^2y = y''dx^2$$

de donde

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

expresión que justifica una de las notaciones empleadas para representar la derivada segunda. En forma análoga se obtiene

$$d^3y = y'''dx^3 \quad \text{e} \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}; \qquad d^4y = y^{IV}dx^4 \quad \text{e} \quad y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4}$$

Pero adviértase que por dx^2, dx^3, dx^4, etc. ha de entenderse $(dx)^2$, $(dx)^3$, $(dx)^4$, etc., respectivamente, y no la diferencial de x^2, x^3, x^4, etc.

EJERCICIOS

Calcular el incremento y la diferencial de las funciones siguientes para los valores que se indican:

311. $y = x^3 - x$ para $x = 2$, $\Delta x = 0'2$

312. $y = 3x^2 + x - 1$ para $x = 1$, $\Delta x = 0'1$

313. $y = (x+1)(x-1)$ para $x = 3$, $\Delta x = 0'001$

Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

314. $y = 3x^2 + 5x - 6$

315. $y = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 1$

316. $y = 4x^3 + 2x - 3$

317. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

318. $y = \dfrac{x + 2}{x^2}$

319. $y = a\sqrt{1 - x^2}$

320. $y = (a + x)\sqrt{a - x}$

321. $y = (a + 2x)^4$

322. $y = x\,(a + 2x)^{-\frac{1}{3}}$

323. $y = \dfrac{x + 7}{x - 1}$

324. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

235. $y = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

326. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}}$

327. $y = \sqrt{1 + x} \cdot \sqrt{1 - x}$

328. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{3x + 2}$

329. $y = a^{3x^2 - 1}$

330. $y = na^{-4x + x^2}$

331. $y = 2\,e^{cx^2 - x}$

332. $y = \ln (1 - x)^3$

333. $y = \log_a \dfrac{1 + x}{x^2 - 1}$

334. $y = \operatorname{sen}^3 2x$

335. $y = 3 \operatorname{tg}^4 x$

336. $y = \operatorname{tg} x - x$

337. $y = x^4 + \ln \dfrac{x}{4}$

338. $y = \ln \operatorname{sen} x^2$

339. $y = \ln \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{\cos 2x}$

340. $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{2a}$

341. $y = \operatorname{arc\,tg} (4x - 1)$

342. Si en lugar de $\sqrt{0'65}$ se halla $\sqrt{0'64} = 0'8$, ¿cuál es la cota del error absoluto cometido?

343. Se ha medido la arista de un cubo con error menor que 0'1 mm. y se ha encontrado como medida 7'6 cm. ¿Cuál es límite del error absoluto cometido al calcular, a partir de este dato, el volumen del cubo?

344. El diámetro de una esfera es $3 \pm 0'1$ cm. ¿Cuál será el error límite del error absoluto cometido al calcular, a partir de aquel dato, el volumen de la esfera?

345. Calcular la cota del error absoluto y relativo cometido en el cálculo del área de un campo cuadrado cuyo lado mide 35'3 m., si se ha tomado con aproximación de decímetros.

346. Calcular la cota del error absoluto y relativo cometido en el cálculo del volumen de una esfera de 12'51 mm. de diámetro, medido con un instrumento que aprecia milésimas de centímetro.

347. Hallar la cota del error relativo del producto $y = \sqrt{0'64} \cdot \operatorname{sen} 30°$, si el valor exacto de los datos es $\sqrt{0'65}$ y sen 30° 10'.

18. La circunferencia

133. Ecuación de la circunferencia. — Recordemos que la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo C, llamado centro.

Tratemos de hacer ahora el estudio analítico de esta curva.

Sean a y b las coordenadas del centro C de una circunferncia (f. 72).

Para obtener la ecuación del lugar geométrico representado por esta circunferencia, bastará expresar que la distancia de un punto cualquiera $P(x, y)$ de dicha circunferencia al centro $C(a, b)$ es constante e igual al radio.

Llamando r a la medida del radio, o distancia PC, tendremos

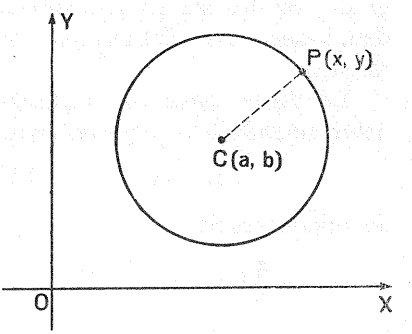

FIG. 72

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \qquad [1]$$

que es *la ecuación de la circunferencia.* En efecto: esta relación está satisfecha siempre, independientemente de la posición del punto P, y recíprocamente, todo punto del plano cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación [1], dista r de C, y, por tanto, pertenece a la circunferencia.

Si el centro C es el origen de coordenadas, la ecuación [1] se transforma en

$$\sqrt{x^2+y^2} = r \qquad [2]$$

Podemos suprimir el radical de ambas ecuaciones elevando al cuadrado, con lo que resultan las formas racionales

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2} \qquad [3] \qquad \boxed{x^2 + y^2 = r^2} \qquad [4]$$

Desarrollando los cuadrados expresados en la primera de estas ecuaciones y pasando r^2 al primer miembro, obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \qquad [5]$$

Si en esta ecuación hacemos

$$-2a = A; \qquad -2b = B; \qquad a^2 + b^2 - r^2 = C$$

se transforma en

$$\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0} \qquad [6]$$

Recíprocamente: toda ecuación de esta forma, es decir, de segundo grado con dos incógnitas, con los coeficientes de x^2 e y^2 iguales a la unidad, y que carece del término con el producto xy, representa una circunferencia.

En efecto: basta ver que la ecuación [6] se puede poner en la forma [5], determinando a, b, r por las condiciones

$$-2a = A, \qquad -2b = B, \qquad a^2 + b^2 - r^2 = C,$$

de donde resulta

$$a = -\frac{A}{2}; \qquad b = -\frac{B}{2}; \qquad r^2 = a^2 + b^2 - C = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$$

o sea

$$r = \sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$$

Si $A^2 + B^2 - 4C < 0$, la raíz cuadrada es un número imaginario, y entonces la ecuación [6] se dice que representa a una circunferencia imaginaria. Si $A^2 + B^2 - 4C = 0$, el radio es nulo, y la ecuación se reduce a $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$, que sólo se verifica para $x = a$, $y = b$; es decir, la circunferencia se reduce al punto (a, b).

Resumiendo, diremos: toda ecuación de la forma [6] representa a una circunferencia cuyo centro y radio vienen dados por las fórmulas

$$\boxed{a = -\frac{A}{2}; \qquad b = -\frac{B}{2}; \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}} \qquad [7]$$

EJEMPLO 1.º — Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 2)$ y radio $r = 3$. Aplicando la fórmula [3] y efectuando operaciones, tenemos:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 9 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

EJEMPLO 2.º — Calcular las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$.

Aplicando las fórmulas [7], se obtiene:

$$a = -\frac{-4}{2} = 2; \qquad b = -\frac{-6}{2} = 3;$$

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{16+36-32} = \tfrac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$$

134. Determinación de una circunferencia. — Sabemos que una circunferencia está determinada por tres de sus puntos. Vamos a confirmar analíticamente esta propiedad; al mismo tiempo, hallaremos la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados.

Supongamos, por ejemplo, los puntos (0, 1), (4, 0) y (5, 4). Para que estos tres puntos determinen una circunferencia, sus coordenadas han de satisfacer a la ecuación [6], es decir, se ha de verificar:

$$\left.\begin{aligned} 0 + 1 + 0 + B + C &= 0 \\ 16 + 0 + 4A + 0 + C &= 0 \\ 25 + 16 + 5A + 4B + C &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{o sea} \quad \left\{\begin{aligned} B + C &= -1 \\ 4A + C &= -16 \\ 5A + 4B + C &= -41 \end{aligned}\right.$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se obtiene $A = -5$, $B = -5$ y $C = 4$, y la ecuación de la circunferencia pedida será

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$$

El método seguido es general. Si los tres puntos están en línea recta, se obtiene un sistema incompatible, lo cual confirma lo que ya sabemos por otra parte, es decir, que no existe circunferencia que pase por tales puntos.

135. Intersecciones de la circunferencia con una recta. — Las coordenadas de los puntos comunes a una circunferencia y a una recta han de

satisfacer a las ecuaciones de ambas, es decir, han de ser soluciones del sistema formado por

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ y = mx + b \end{aligned}\right\}$$

Como una de las ecuaciones es de segundo grado y la otra de primero, el sistema podrá tener dos soluciones reales, una o ninguna, lo que indica que los puntos comunes de una recta y una circunferencia pueden ser dos, uno o ninguno. La recta, según sabemos por Geometría, se llama *secante, tangente* o *exterior,* respectivamente (figs. 73, 74 y 75).

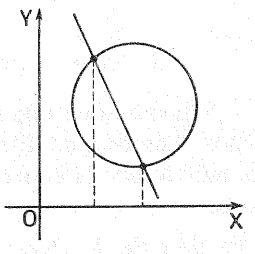

FIG. 73

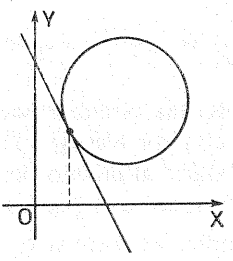

FIG. 74

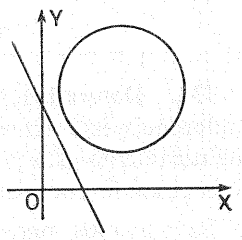

FIG. 75

EJEMPLO. — Hallar los puntos de intersección de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 11x - 7y - 60 = 0 \quad \text{con la recta} \quad y = 2x - 8.$$

Resolveremos el sistema formado por las dos ecuaciones. Eliminando y, resulta

$$x^2 + (2x-8)^2 + 11x - 7(2x-8) - 60 = 0$$

y efectuando operaciones y reduciendo, se obtiene

$$5x^2 - 35x + 60 = 0 \quad \text{o su equivalente} \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

cuyas raíces son $x_1 = 4$ y $x_2 = 3$.

Por tanto, las soluciones del sistema son: $x_1 = 4$, $y_1 = 0$; $x_2 = 3$, $y_2 = -2$, lo que nos indica que los puntos de intersección de la circunferencia con la recta son (4, 0) y (3, −2). La recta es, pues, secante a la circunferencia.

136. Ecuación de la tangente a la circunferencia. — Sea la circunferencia

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad [1]$$

Recordemos que la ecuación de la tangente a una curva, en uno de sus puntos (x_1, y_1), es

$$y - y_1 = y'_1(x - x_1)$$

siendo y'_1 el valor que toma la derivada de la función correspondiente a la curva, en el punto (x_1, y_1).

Para derivar la expresión [1], tengamos en cuenta que y es una función de x, por lo que se obtiene

$$2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$$

de donde

$$y' = -\frac{x-a}{y-b} \qquad \text{e} \qquad y'_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$$

Por consiguiente, la ecuación pedida será

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)}$$

En el caso particular de que se trate de una circunferencia cuyo centro coincida con el origen de coordenadas, como entonces $a = b = 0$, la ecuación de la tangente será

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)}$$

o bien $$y_1 y - y_1^2 + x_1 x - x_1^2 = 0$$

o sea $$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2$$

y como $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, por estar (x_1, y_1) en la circunferencia, la ecuación puede tomar también la forma siguiente:

$$\boxed{x_1 x + y_1 y = r^2}$$

EJEMPLO. — Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

en cada uno de los puntos en que corta al eje de abscisas.

Los puntos de intersección con el eje OX son (5, 0) y (1, 0). Las coordenadas del centro de la circunferencia dada son

$$a = -\frac{A}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \text{y} \qquad b = -\frac{B}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Tangente en el punto (5, 0):

$$y - 0 = -\frac{5-3}{0-1}(x-5) \qquad \text{o sea} \qquad 2x - y - 10 = 0$$

Tangente en el punto (1, 0):

$$y - 0 = -\frac{1-3}{0-1}(x-1) \qquad \text{o sea} \qquad 2x + y - 2 = 0$$

137. Intersección de dos circunferencias. — Las coordenadas de los puntos comunes a dos circunferencias han de satisfacer a las ecuaciones de ambas, es decir, han de ser soluciones del sistema formado por

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + Ax + By + C &= 0 \\ x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Restando estas dos ecuaciones, resulta la ecuación lineal

$$(A - A')x + (B - B')y + C - C' = 0 \qquad [1]$$

Por ser consecuencia de las dos ecuaciones anteriores, la recta representativa de esta ecuación pasará por los puntos comunes a las dos circunferencias, cuando aquellos existan. Bastará, por tanto, resolver el sistema formado por esta ecuación y una de las dadas.

Como una recta y una circunferencia pueden tener dos puntos comunes, uno o ninguno, dos circunferencias tendrán asimismo dos puntos comunes (circunferencias *secantes),* uno sólo (circunferencias *tangentes)* o ninguno (circunferencias *exteriores* o *interiores).*

La recta representada por la ecuación [1] se llama *eje radical* de las dos circunferencias, como veremos más adelante.

138. Potencia de un punto. — Recordemos que se llama *potencia de un punto* respecto de una circunferencia, al valor constante de los productos de los dos segmentos que determina la circunferencia sobre cualquier secante que pase por el punto, contados dichos segmentos a partir del punto dado.

Así (fig. 76), tendremos:

$$\text{Pot. } (P) = PA \times PB = PM \times PN = \ldots$$

Recordemos asimismo que la potencia de un punto, en función de su distancia al centro de la circunferencia y del radio de ésta, viene dada por

$$\text{Pot. } (P) = d^2 - r^2$$

Hallemos ahora analíticamente la potencia de un punto $P(x_1, y_1)$, con respecto a la circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio igual a r. Se tiene:

Ecuación de la circunferencia:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

Distancia entre P y C:

$$d = \sqrt{(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2}$$

Potencia del punto P:

$$\text{Pot. } (P) = d^2 - r^2 = (x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 - r^2$$

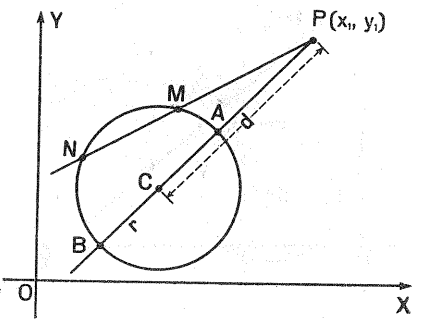

FIG. 76

Por tanto: *La potencia de un punto respecto de una circunferencia se obtiene sustituyendo en la ecuación de ésta,*

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

las variables x *e* y *por las coordenadas del punto.*

Observando que

$$d^2 - r^2 \gtreqless 0 \quad \text{según que} \quad d^2 \gtreqless r^2$$

es decir, según que el punto P sea exterior al círculo, esté en la circunferencia, o sea interior, resulta:

Dada una circunferencia $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, *el punto* $P(x_1, y_1)$ *es exterior al círculo, está en la circunferencia, o es interior, según se verifique, respectivamente,* $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C \gtreqless 0$.

EJEMPLO. — La potencia del punto $P(-2, 3)$ respecto de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

es

$$\text{Pot. } (P) = (-2)^2 + 3^2 - 2(-2) - 4 \cdot 3 + 1 = 6$$

Por consiguiente, se trata de un punto exterior al círculo.

139. Eje radical de dos circunferencias. — Recordemos que se llama *eje radical* de dos circunferencias, al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ellas.

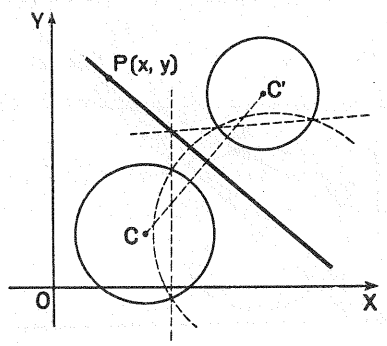

FIG. 77

Para obtener la ecuación del eje radical de dos circunferencias,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0$$

basta expresar que un punto cualquiera $P(x, y)$ del eje radical (fig. 77), tiene potencias iguales respecto de dichas circunferencias.

Es decir, tendremos:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = x^2 + y^2 + A'x + B'y + C'$$

Pasando ahora todos los términos al primer miembro y sacando factor común, resulta

$$\boxed{(A - A')x + (B - B')y + C - C' = 0}$$

Recíprocamente: todo punto (x, y) que verifique a esta ecuación, verificará también a la anterior y, por tanto, pertenece al eje radical de las dos circunferencias.

EJEMPLO. — El eje radical de las circunferencias que tienen por ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 10 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$$

es

$$(-4 - 2)x + (6 + 4)y - 10 + 8 = 0 \quad \text{o sea} \quad 3x - 5y + 1 = 0$$

EJERCICIOS

348. Hallar las ecuaciones de las circunferencias cuyo centro y radio son:

1.° $C(-3, 2)$, $r = 4$; 2.° $C(0, 3)$, $r = 2$; 3.° $C(5, 0)$, $r = 3$

349. Hallar las coordenadas del centro y el radio de las circunferencias:

1.° $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ 2.° $x^2 + y^2 + 3x + y + 10 = 0$

3.° $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 6 = 0$ 4.° $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 3x + y + 5 = 0$

Hallar la ecuación de la circunferencia que:

350. Tiene su centro en $(2, -3)$ y es tangente al eje XX'.

351. Tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $x + 3y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$, y su radio es igual a 5.

352. Tiene su centro en la recta $5x - 3y - 2 = 0$ y pasa por los puntos (4, 0) y (0, 4).

353. Pasa por los puntos $(3, -2)$, (4, 0) y (0, 5).

354. Tiene su centro en (5, 1) y es tangente al eje YY'.

355. Pasa por el punto $(-2, 2)$ y es tangente a las rectas $4x + 3y - 8 = 0$, $4x - 3y + 24 = 0$.

356. Tiene su centro en (1, 3) y es tangente a la recta $3x + 4y + 10 = 0$.

357. Tiene por diámetro el segmento determinado por los puntos (2, 0) y $(-6, -6)$.

358. Es tangente a los ejes y pasa por el punto $(6, -3)$.

359. Corta al eje XX' en los puntos $(-1, 0)$ y (5, 0) y pasa por el punto (6, 1).

360. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ con cada una de las rectas:

$x + 7y - 20 = 0$; $3x + 4y - 27 = 0$; $x + y - 10 = 0$.

361. Hallar las ecuaciones de las tangentes y de las normales, en los puntos de abscisa 2, a las circunferencias:

$x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$; $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$.

362. Calcular las potencias de los puntos $(-2, 3)$ y $(2, -1)$ respecto de las tres circunferencias anteriores, e indicar sus posiciones respecto de los círculos respectivos.

363. Hallar las ecuaciones de los ejes radicales de las circunferencias del ejercicio 361, tomadas dos a dos.

364. Demostrar que los tres ejes radicales del ejercicio anterior pasan por un punto (llamado centro radical) y calcular sus coordenadas.

365. Demostrar que el eje radical de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une los centros.

366. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 14x - 16y + 100 = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$$

367. Ídem de las circunferencias

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36 \qquad \text{y} \qquad (x-12)^2 + (y-3)^2 = 16$$

368. Hallar el área del círculo cuya circunferencia pasa por los puntos (2, 1), (0, 0) y (2, 3).

369. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la bisectriz del segundo cuadrante y que tiene su centro en $(-5, 0)$.

370. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (1, 4) y es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.

371. En la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio igual a 3, hallar la ecuación de la tangente en cada uno de los puntos de corte con la recta $y - \sqrt{5} = 0$.

372. Determinar la ecuación, el centro y el radio de la circunferencia que pasa por el punto (3, 0) y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$ en el punto (3, 3).

373. Calcular el volumen de un cilindro cuya circunferencia de la base tiene por ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$, y cuya altura mide 2 metros.

374. Hallar la longitud de la cuerda que determina la recta $x + 1 = y$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

375. Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de los ejes coordenados con la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 11y - 12 = 0$.

376. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita a un triángulo isósceles cuyos vértices de la base son los puntos (2, 0) y (8, 0), y el tercer vértice se halla situado en la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

377. Una circunferencia es tangente a las rectas

$$4x + y + 3 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4x + y - 7 = 0.$$

Se pide el área del círculo y las coordenadas del centro.

19. La elipse

140. Definiciones y propiedades. — Si cortamos a una superficie cónica por un plano que no sea perpendicular al eje y que corte a todas las generatrices, obtenemos una línea curva cerrada llamada *elipse* (fig. 78).

La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano, cuyas distancias a dos puntos fijos del mismo plano, sumadas, dan una cantidad constante.

Los puntos fijos F y F' (fig. 79) se llaman *focos.*

Los segmentos que unen un punto cualquiera de la curva con los focos, se denominan *radios vectores.* Se designan por r y r', y la suma de sus longitudes se representa por $2a$.

El segmento AA' que pasa por los focos y tiene sus extremos en la curva, se llama *eje principal* o *eje mayor,* y se representa por $2a$.

El segmento BB', mediatriz del segmento $F'F$ y cuyos extremos están en la curva, se denomina *eje secundario* o *eje menor.* Se representa por $2b$.

La distancia $F'F$ entre los focos se llama *distancia focal* y se representa por $2c$.

Como en el triángulo MFF' un lado es menor que la suma de los otros dos, tendremos

$$FF' < FM + F'M$$

o sea

$$2c < 2a \quad \text{de donde} \quad c < a$$

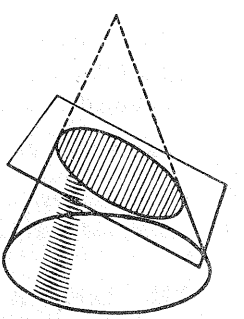

FIG. 78

La razón $\frac{c}{a}$ se llama *excentricidad;* se representa por e, y su valor puede variar entre 0 y 1. La excentricidad indica la mayor o menor abertura de la elipse. Si la excentricidad es 0, resulta una circunferencia; y si es 1, se trata de un segmento rectilíneo.

Los puntos A, A', B y B', en donde los ejes cortan a la curva, se llaman *vértices* de la elipse.

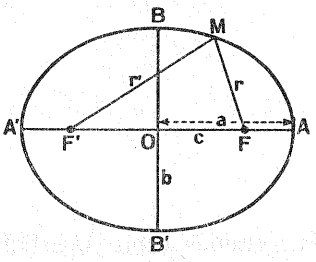

FIG. 79

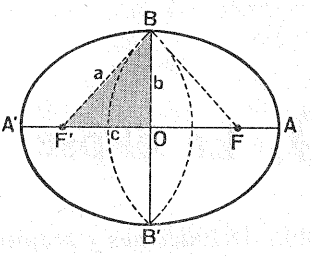

FIG. 80

El punto *O*, intersección de los ejes, es el *centro* de la elipse.

Recordemos las principales propiedades de la elipse:

1.ª *La suma de los radios vectores es igual al eje mayor* $2a$ (fig. 79):

$$FM + F'M = AA' \quad \text{o sea} \quad r + r' = 2a$$

2.ª *Los radios vectores de los extremos del eje menor son iguales al semieje mayor* a (fig. 80):

$$F'B = FB = a$$

3.ª *El semieje mayor* a *es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el semieje menor* b *y la semidistancia focal* c, como se ve claramente en el triángulo rectángulo *BOF'* (fig. 80). Es decir:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{de donde} \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

4.ª *Los ejes y el centro de la elipse son, respectivamente, ejes y centro de simetría de la curva.*

141. Ecuación de la elipse. — Vamos a obtener la ecuación de la elipse considerando como ejes coordenados los propios ejes de simetría de la curva. Entonces (fig. 81), las coordenadas de los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.

Sea $M(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la propiedad que caracteriza a la curva, se tiene

$$MF' + MF = 2a \qquad [1]$$

Pero,

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

luego, la relación [1] es equivalente a esta otra

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad [2]$$

que puede considerarse como la ecuación de la elipse. Tratemos ahora de racionalizarla y darle una forma más cómoda.

Aislando uno de los radicales, se tiene

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

reduciendo términos y dividiendo por 4,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

elevando nuevamente al cuadrado,

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

efectuando el producto indicado en el primer miembro,

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

reduciendo términos y pasando c^2x^2 al primer miembro y a^2c^2 al segundo,

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

sacando x^2 y a^2 factores comunes,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

sustituyendo $a^2 - c^2$ por su igual b^2,

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

o bien, dividiendo por a^2b^2,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad [3]$$

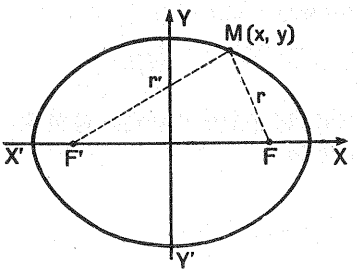

FIG. 81

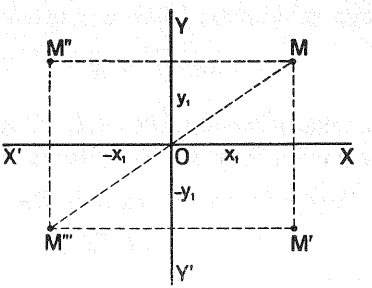

FIG. 82

que es la forma más cómoda de la cuación de la elipse, llamada *forma reducida.*

La ecuación anterior nos permite comprobar algunas de las propiedades de la elipse, como es su simetría. En efecto: Si $M(x_1, y_1)$ es un punto de la elipse (fig. 82), sus coordenadas (x_1, y_1) verifican a la ecuación [3]. Pero también lo harán las coordenadas $(x_1, -y_1)$, $(-x_1, y_1)$ y $(-x_1, -y_1)$ correspondientes a los puntos M', M'' y M'''; luego estos puntos, que son simétricos del M respecto del eje XX', del eje YY' y del punto O, respectivamente, pertenecen también a la elipse.

Por otra parte, si en la ecuación [3] hacemos $y = 0$, obtenemos $x = \pm a$; es decir, la elipse corta al eje XX' en dos puntos A y A' de abscisas $+a$ y $-a$.

Haciendo $x = 0$, se obtiene $y = \pm b$; luego, la curva corta al eje YY' en dos puntos B y B' de ordenadas $+b$ y $-b$.

EJEMPLO. — Calcular los ejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $x^2 + 4y^2 = 16$.

Pongamos la ecuación en la forma reducida. Para ello, dividamos a los dos miembros por 16, con lo que resulta

$$\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = 1 \quad \text{o sea} \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Según esto, el eje mayor es $2 \times 4 = 8$ y el menor $2 \times 2 = 4$.

De $4^2 = 2^2 + c^2$ se deduce $c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Luego, las coordenadas de los focos son $F(2\sqrt{3}, 0)$ y $F'(-2\sqrt{3}, 0)$.

La excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

142. Construcciones gráficas. — La construcción de la elipse puede efectuarse por *trazo continuo* o *por puntos,* cuando se conocen los focos y el eje mayor $AA' = 2a$.

I. POR TRAZO CONTINUO. — Sea AA' (fig. 83) el eje mayor y F y F' los focos. Se toma un hilo de longitud igual a AA' y se fijan sus extremos en los focos F y F', mediante alfileres o chinchetas. Si manteniendo tirante el hilo hacemos deslizar el lápiz sobre el papel, se cumplirá que en todas las posiciones la suma de las distancias a F y F' será la misma e igual a AA'. Luego, la curva dibujada es una elipse.

Este es el procedimiento empleado preferentemente por los jardineros, por lo que se le denomina *método del jardinero.*

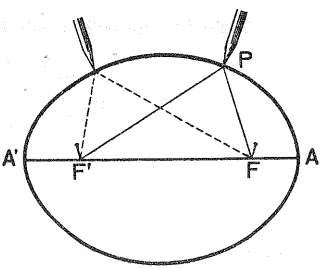

FIG. 83

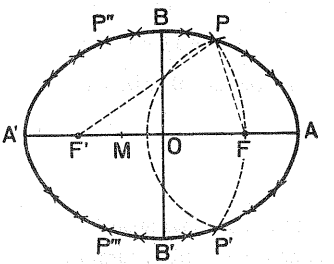

FIG. 84

II. POR PUNTOS. — Se traza el eje mayor AA' (fig. 84) y se marcan en él el centro O y los focos F y F'; luego, con la longitud $OA = a$ y haciendo centro en F y F' se determinan con el compás los puntos B y B'. Se toma después sobre el eje un punto cualquiera M, situado entre el centro O y uno de los focos, y con centros en F' y F se trazan sendos arcos de radios MA y MA', los cuales se cortan en dos puntos P y P', que pertenecen a la elipse, pues para el P, por ejemplo, se tiene

$$PF' + PF = MA + MA' = 2a$$

Como puede repetirse la construcción haciendo centro en F con radio MA y en F' con radio MA', se obtienen otros dos puntos P'' y P'''. Es decir que, de cada posición de M resultan cuatro puntos de la elipse.

Variando la posición de M entre F' y O, se pueden obtener cuantos puntos se deseen, los cuales se unen después mediante un trazo continuo.

143. Intersección de la elipse con una recta. — Las coordenadas de los puntos de intersección serán las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ y &= mx + b \end{aligned}\right\}$$

formado por las ecuaciones de ambas líneas.

Siendo de primer grado una de las ecuaciones y de segundo la otra, podrá haber dos soluciones reales, una o ninguna, lo que significa que los puntos comunes de una recta y una elipse pueden ser dos *(secante)*, uno *(tangente)* o ninguno *(exterior)*.

EJEMPLO. — Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ con la recta $x + 2y = 0$.

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} &= 1 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = -2$, $y_1 = 1$ y $x_2 = 2$, $y_2 = -1$.

Luego, los puntos comunes a la recta y a la elipse son $(-2, 1)$ y $(2, -1)$.

144. Ecuación de la tangente en un punto. — Sea la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad [1]$$

y (x_1, y_1) un punto de la misma.

La ecuación general de la tangente a una curva en el punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = y'_1(x - x_1) \qquad [2]$$

en la que y'_1 representa el valor que toma la derivada de la función en el punto considerado.

Para hallar ese valor, derivemos en [1], teniendo en cuenta que y es función de x. Resulta

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0 \quad \text{de donde} \quad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Esta derivada, para el punto (x_1, y_1) toma el valor $y'_1 = -\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ por lo que la ecuación [2] se transforma en

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1).}$$

Esta ecuación se suele presentar también en otra forma más fácil de recordar. Para obtenerla, multipliquemos a la anterior por $\dfrac{y_1}{b^2}$; obtendremos

$$\frac{y_1y}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -\frac{x_1x}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2}$$

y de aquí, resulta

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

Pero $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$ por pertenecer a la elipse el punto (x_1, y_1); luego, otra forma de la ecuación de la tangente, será

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1}$$

145. Ecuación de la normal. — *Se llama normal a una curva, a la perpendicular a la tangente en el punto de contacto.*

Por ser la normal perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, los coeficientes angulares de estas dos rectas serán recíprocos y de signos contrarios; luego, el coeficiente angular de la normal en el punto (x_1, y_1), será

$\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}$ y la ecuación, $\boxed{y - y_1 = \dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)}$

EJEMPLO. — Averiguar si el punto $(6, -4)$ pertenece a la elipse cuya ecuación es $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; en caso afirmativo, hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva en dicho punto.

La ecuación se verifica para $x = 6$ e $y = -4$; luego, el punto dado pertenece a la elipse.

Ecuación de la tangente:

$$y + 4 = -\frac{25 \cdot 6}{100\,(-4)}(x-6) \qquad \text{o su equivalente} \qquad 3x - 8y - 50 = 0$$

Ecuación de la normal:

$$y + 4 = \frac{100\,(-4)}{25 \cdot 6}(x-6) \qquad \text{o su equivalente} \qquad 8x + 3y - 36 = 0$$

146. Trazado de la tangente. — El trazado de la tangente a la elipse se deduce inmediatamente de la siguiente propiedad, que vamos a demostrar:

La tangente a la elipse en uno de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por uno de los radios vectores y la prolongación del otro.

Recordemos que en todo triángulo, la bisectriz de un ángulo exterior corta a la prolongación del lado opuesto en un punto, tal que sus distancias a los extremos de ese lado son proporcionales a los otros dos lados.

Si aplicamos este teorema al triángulo $F'PF$ (fig. 85) y probamos que la tangente PT corta a la prolongación de $F'F$ en un punto T, tal que se cumpla la proporción

$$\frac{F'T}{FT} = \frac{PF'}{PF}$$

dicha tangente PT coincidirá con la bisectriz del ángulo FPA, y quedará demostrado lo que nos proponíamos.

Calculemos primeramente los radios vectores $PF' = r'$ y $PF = r$ correspondientes al punto $P\,(x_1, y_1)$.

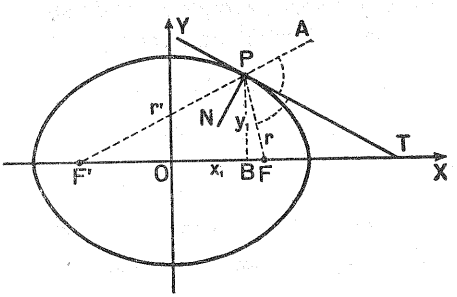

FIG. 85

En el triángulo rectángulo $F'BP$, se verifica

$$r'^2 = (x_1 + c)^2 + y_1^2$$

y en el FBP,

$$r^2 = (c - x_1)^2 + y^2$$

Restando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$r'^2 - r^2 = \\ = (x_1 + c)^2 - (c - x_1)^2 = 4cx_1$$

o bien,

$$(r'+r)(r'-r) = 4cx_1$$

y como

$$r' + r = 2a$$

será

$$r' - r = \frac{4cx_1}{2a} = \frac{2cx_1}{a}$$

Finalmente, sumando y restando las dos últimas igualdades, resulta

$$PF' = r' = a + \frac{cx_1}{a} = \frac{a^2 + cx_1}{a}$$

$$PF = r = a - \frac{cx_1}{a} = \frac{a^2 - cx_1}{a}$$

Dividiendo ordenadamente estas dos igualdades, se obtiene

$$\frac{PF'}{PF} = \frac{a^2 + cx_1}{a} : \frac{a^2 - cx_1}{a} = \frac{a^2 + cx_1}{a^2 - cx_1} \qquad [1]$$

En la figura vemos que

$$F'T = F'O + OT = c + OT \qquad \text{y} \qquad FT = OT - OF = OT - c$$

Falta ahora calcular OT, que es la abscisa del punto en que la tangente corta al eje OX. Para hallar esta abscisa, bastará hacer $y = 0$ en la ecuación

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \text{con lo que resulta} \quad x = \frac{a^2}{x_1} = OT$$

Sustituyendo este valor en las igualdades que nos dan $F'T$ y FT, se obtiene

$$F'T = c + \frac{a^2}{x_1} = \frac{cx_1 + a^2}{x_1} \qquad \text{y} \qquad FT = \frac{a^2}{x_1} - c = \frac{a^2 - cx_1}{x_1}$$

y dividiendo,

$$\frac{F'T}{FT} = \frac{a^2 + cx_1}{x_1} : \frac{a^2 - cx_1}{x_1} = \frac{a^2 + cx_1}{a^2 - cx_1} \qquad [2]$$

De las igualdades [1] y [2] se obtiene

$$\frac{F'T}{FT} = \frac{PF'}{PF}$$

quedando probado lo que queríamos.

De la propiedad anterior se deduce que la normal NP a la elipse es bisectriz del *ángulo* $F'PF$ formado por los radios vectores.

EJERCICIOS

378. Escribir la ecuación de la elipse cuyos ejes miden 7 y 5, referida a esos ejes.

379. Escribir la ecuación de la elipse cuyos ejes miden $2\sqrt{2}$ y 2.

380. Determinar la ecuación de una elipse en la que $a = 17$ y $c = 8$.

381. Hallar la semidistancia focal de la elipse $\frac{x^2}{92} + \frac{y^2}{28} = 1$.

382. Hallar el eje mayor de un alipse, sabiendo que el eje menor es 30 y que el punto $(-9, 4)$ pertenece a la curva.

383. Uno de los vértices que determina el eje principal de una elipse dista 8 de un foco y 18 del otro. Escribir la ecuación de la elipse.

384. Determinar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos

$$\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

385. Calcular los ejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $x^2 + 2y^2 = 2$.

386. Calcular a, b y c en la elipse $4x^2 + 9y^2 = 49$.

387. Construir por puntos una elipse cuyo eje mayor mida 4 cm. y la distancia focal 3 cm.

388. Construir por puntos una elipse que tenga por ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{19} = 1$. (Tomar como unidad el medio cm.).

389. Hallar los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ con la recta $2x + 5y - 14 = 0$.

390. Calcular la intersección de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ con la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

391. En una elipse, el eje mayor es $2a = 4$ y la distancia focal $2c = 2\sqrt{2}$. Calcular la longitud de los radios vectores correspondientes a los puntos de abscisa $x = -\sqrt{2}$ y hallar la ecuación de la elipse.

392. ¿Cómo es la recta $x + y - 9 = 0$ respecto de la elipse $\frac{x^2}{54} + \frac{y^2}{27} = 1$?

393. En una elipse, el eje mayor es $2a = 14$ y el eje menor $2b = 8$. Hallar la ecuación de la tangente en el vértice A.

394. En la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{36} = 1$, determinar el valor que ha de tener a para que la intersección con la recta $y = 2$ tenga la abscisa 4.

395. En la elipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, determinar el valor que ha de tener b para que concurran en un mismo punto de la curva las rectas $x = 4$ e $y = -3$.

396. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

397. Dada la elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, hallar los puntos de intersección de las normales a la curva en los puntos de abscisa 1 con los ejes coordenados.

398. En la elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$, ¿cuál es la longitud de la cuerda paralela al eje menor que divide al semieje a en dos partes iguales?

399. Hallar los puntos de intersección de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 13$.

400. Dada la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, hallar los puntos de tangencia de las tangentes a la curva cuya pendiente es $\frac{4}{5}$.

401. Dada la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, calcular el ángulo que forman las normales a la curva trazadas por los puntos de abscisa $x = 2$.

402. Dada la elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ y un punto de ella $\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, comprobar que la normal a la curva en ese punto es bisectriz del ángulo que forman los radios vectores.

20. La hipérbola

147. Definiciones y propiedades. — Si cortamos a una superficie cónica de dos hojas por un plano que sea paralelo a dos de las generatrices, la sección producida es una curva compuesta de dos ramas que se denomina *hipérbola* (fig. 86).

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, cuyas distancias a dos puntos fijos del mismo plano, restadas, dan una cantidad constante.

Los puntos fijos F y F' (fig. 87) se llaman *focos.*

Los segmentos que unen un punto cualquiera de la curva con los focos, se denominan *radios vectores.* Se designan por r y r', y la diferencia de sus longitudes se representa por $2a$.

La recta $A'A$ determinada por los focos y limitada por la curva se llama *eje principal* o *eje real,* y se representa por $2a$.

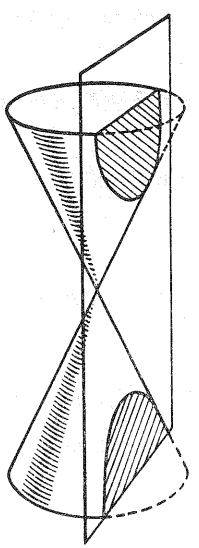

FIG. 86

La recta BB', perpendicular a $A'A$ en su punto medio, se denomina *eje secundario* o *eje imaginario.*

La distancia $F'F$ entre los focos se llama *distancia focal,* y se representa por $2c$.

Como en el triángulo MFF' un lado es mayor que la diferencia de los otros dos, tendremos

$$FF' > FM - F'M$$

o sea

$$2c > 2a \quad \text{de donde} \quad c > a$$

La razón $\frac{c}{a}$ se llama *excentricidad;* se representa por e y su valor es siempre mayor que 1.

Los puntos A y A' son los vértices de la hipérbola.

El punto O, intersección de los ejes, es el *centro* de la hipérbola.

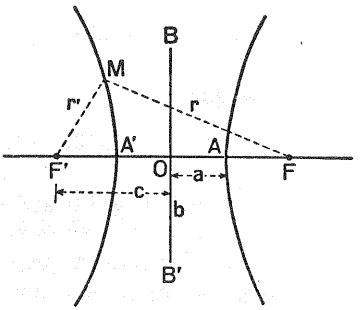

FIG. 87

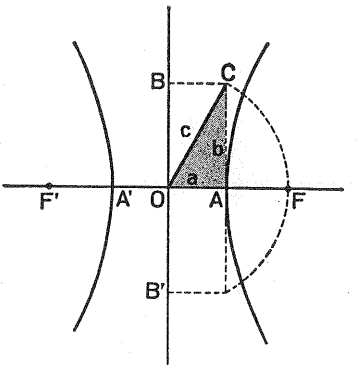

FIG. 88

Recordemos las principales propiedades de la hipérbola.

1.ª *La diferencia de los radios vectores de un punto cualquiera de la hipérbola es igual a* 2a:

$$FM - F'M = AA' \quad \text{o sea} \quad r - r' = 2a$$

2.ª *En la hipérbola, el eje secundario no corta a la curva.* Por analogía con lo que hemos dicho de la elipse, se conviene en atribuírle una longitud $2b$, tal que

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{de donde} \quad b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{y} \quad a^2 = c^2 - b^2$$

Para determinar la longitud de b se construye un triángulo rectángulo OAC (figura 88) cuya hipotenusa es la semidistancia focal c, y uno de sus catetos el semieje real a; el otro cateto AC será la longitud que corresponde a b. Por tanto, el eje BB' se obtendrá llevando esta longitud a ambos lados de O.

3.ª *Los ejes y el centro de la hipérbola son, respectivamente, ejes y centro de simetría de la curva.*

148. Ecuación de la hipérbola. — Consideremos como ejes coordenados los propios ejes de la curva, en cuyo caso, las coordenadas de los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.

Sea $M(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola (fig. 89). En virtud de la definición, se cumple siempre que

$$|MF' - MF| = 2a$$

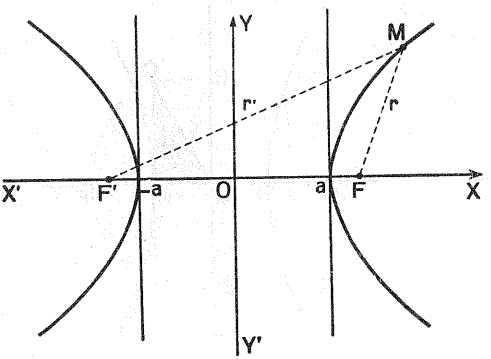

FIG. 89

lo que equivale a

$$MF' - MF = \pm 2a$$

según que

$MF' > MF$ o que $MF' < MF$

El proceso para llegar a la ecuación de la hipérbola es análogo al seguido para la elipse. Es decir, tendremos:

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Esto es ya la ecuación de la hipérbola, pero vamos a darle forma más cómoda.

Aislando uno de los radicales, se tiene

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

reduciendo términos y dividiendo por 4,

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando de nuevo al cuadrado,

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

efectuando el producto indicado en el segundo miembro,

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

reduciendo términos y pasando a^2x^2 y a^2y^2 al primer miembro y a^4 al segundo,

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

sacando x^2 y a^2 factores comunes,

$$(c^2-a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2-a^2)$$

sustituyendo $c^2 - a^2$ por su igual b^2,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

o bien, dividiendo por a^2b^2,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad [1]$$

que es la forma más cómoda de la ecuación de la hipérbola, llamada *forma reducida.*

Como hicimos con la elipse, la ecuación de la hipérbola nos puede servir para comprobar la simetría de esta curva. Así, se ve que si un punto (x_1, y_1) pertenece a la curva, también pertenecen a ella los puntos $(x_1, -y_1)$, $(-x_1, y_1)$ y $(-x_1, -y_1)$, lo que significa que los ejes y el centro de la curva son ejes y centro de simetría de la misma.

Si en la ecuación [1] hacemos $y = 0$, se obtiene $x = \pm a$; significa esto que la hipérbola corta al eje XX' en dos puntos A y A' que distan de O una longitud igual a a.

De la misma fórmula [1] se obtiene la relación

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

que nos dice que y no es real para valores de x comprendidos entre $-a$ y $+a$. En consecuencia, la hipérbola no tiene ningún punto situado en la porción de plano comprendida entre las dos paralelas al eje YY', trazadas por los vértices de la curva (fig. 89).

Cuando a x le atribuímos el valor cero, resulta

$$y = \pm b\sqrt{-1}$$

razón por la cual al eje secundario se le llama también *eje imaginario.*

149. Construcciones gráficas. — La construcción de la hipérbola puede hacerse por *trazo continuo* o por *puntos,* cuando se conocen los focos y el eje real $2a$.

I. Por trazo continuo. — Se toma un regla y un hilo, éste de longitud igual a la de la regla, menos $2a$ (fig. 90). Se fija un extremo del hilo en uno de los focos F, y el otro en el extremo C de la regla. Después se sujeta el otro extremo de la regla en el foco F', y se hace girar alrededor de él. Al mismo tiempo se describe la curva por medio de un lápiz o punzón apoyado en la regla, cuidando de mantener el hilo bien tirante. La curva así descrita es una rama de la hipérbola, pues se verifica siempre que

$$F'M - FM = 2a$$

La segunda rama de la curva se traza del mismo modo, después de invertir los papeles de los focos.

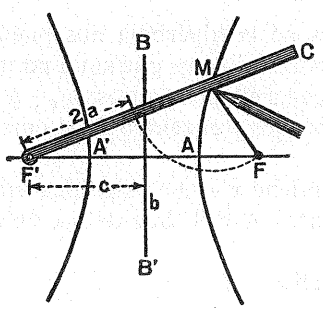

Fig. 90

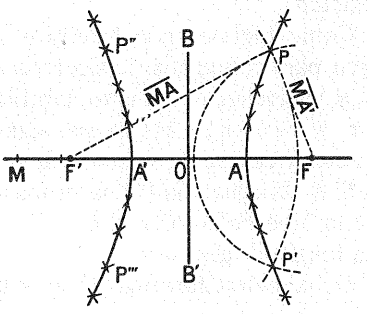

Fig. 91

II. Por puntos. — Se traza el eje real $AA' = 2a$ (fig. 91) y en su prolongación se señalan los focos F' y F. Se toma luego un punto cualquiera M situado sobre el eje real, a izquierda de F' o a derecha de F. Haciendo centro en F' y en F se trazan sendos arcos, de radios MA y MA', los cuales se cortan en dos puntos P y P', que pertenecen a la hipérbola, pues para el P, por ejemplo, se cumple

$$PF' - PF = MA - MA' = 2a$$

Como la construcción puede repetirse haciendo centro en F con radio MA y en F' con radio MA', resultan otros dos puntos P'' y P''', por lo que de cada posición de M pueden obtenerse cuatro puntos de la curva.

Variando la posición del punto M (de modo que permanezca siempre a izquierda de F' o a derecha de F), se pueden obtener cuantos puntos de la curva se deseen, los cuales se unen luego mediante un trazo continuo.

Como el punto M puede tomarse tan alejado de F' como se quiera, resulta que en cada rama de la hipérbola existen puntos cada vez más alejados, por lo que sólo podrá dibujarse una parte de ella.

150. Intersecciones de la hipérbola con una recta. — Obtendremos los puntos comunes a una hipérbola y a una recta, resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones, análogamente a como se estudió para la circunferencia y para la elipse.

Como en aquéllas, la recta puede ser *secante, tagente* o *exterior* a la hipérbola, según que las soluciones del sistema sean dos, una o ninguna.

151. Ecuaciones de la tangente y de la normal en un punto. — Sea la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad [1]$$

Queremos obtener la *ecuación de la tangente* a esta curva en el punto (x_1, y_1). Para ello, recordemos que la ecuación general de la tangente a una curva en el punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = y'_1(x - x_1) \qquad [2]$$

en la que y'_1 representa el valor de la derivada de la función correspondiente a la curva en el punto considerado.

Para hallar y', derivemos en [1]. Se tiene

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0$$

de donde

$$y' = \frac{b^2 x}{a^2 y} \quad \text{y para el punto } (x_1, y_1) \quad y'_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

Por consiguiente, la ecuación [2] se convierte en

$$\boxed{y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)} \qquad [2]$$

Multiplicando ahora por $\frac{y_1}{b^2}$, se obtiene

$$\frac{y_1 y}{b^2} - \frac{{y_1}^2}{b^2} = \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{{x_1}^2}{a^2}$$

y de aquí

$$\frac{{x_1}^2}{a^2} - \frac{{y_1}^2}{b^2} = 1 = \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2}$$

Luego, otra forma de la ecuación de la tangente será

$$\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1}$$

Para hallar la *ecuación de la normal* en el punto (x_1, y_1), bastará sustituir en la ecuación [2] el coeficiente angular por su recíproco con el signo cambiado, con lo que resulta

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)}$$

152. Asíntotas de la hipérbola. — Recordemos que *se denomina asíntota de una curva, a la posición límite de la tangente cuyo punto de contacto se aleja indefinidamente.*

De aquí se deduce que para hallar la ecuación de la asíntota de una curva, tendremos que hallar el límite a que tiende la ecuación de la tangente en el punto (x_1, y_1) cuando x_1 tiende a infinito, al mismo tiempo que lo hace y_1.

En el caso de la hipérbola, la ecuación de la tangente

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

cuando x_1 e y_1 tienden a infinito, toma la forma indeterminada $\infty - \infty$, por lo que habremos de transformarla para hallar su verdadero límite.

Dividiendo por x_1 a todos los términos de la ecuación, resulta

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2 x_1} = \frac{1}{x_1} \qquad [1]$$

Por otra parte, al ser (x_1, y_1) un punto de la hipérbola, se verifica

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

de donde, despejando

$$\frac{y_1^2}{x_1^2} \quad \text{se obtiene (*)} \quad \frac{y_1^2}{x_1^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x_1^2}$$

Ahora bien: esta expresión, cuando $x_1 \longrightarrow \infty$, se convierte en

$$\lim_{x_1 \to \infty} \frac{y_1^2}{x_1^2} = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{y por consiguiente} \quad \lim_{x_1 \to \infty} \frac{y_1}{x_1} = \pm \frac{b}{a}$$

Luego, si tenemos en cuenta este resultado, de la ecuación de la tangente [1] se deduce, al tender x_1 a infinito,

$$\frac{x}{a^2} \mp \frac{y}{ab} = 0$$

de donde, multiplicando por a, se obtiene $\dfrac{x}{a} \mp \dfrac{y}{b} = 0$

y de aquí, $\boxed{y = \frac{b}{a} x}$ e $\boxed{y = -\frac{b}{a} x}$

lo que nos dice que la hipérbola tiene dos asíntotas, las cuales pasan por el origen de coordenadas, y por los puntos (a, b) y $(-a, -b)$ la primera, y $(-a, b)$ y $(a, -b)$ la segunda. Se trata, por consiguiente, de las diagonales del rectángulo *PMQN* (fig. 92) construído con los ejes de la curva, *AA'* y *BB'*, tomados como paralelas medias.

(*) Véase cómo puede procederse. Despejemos primeramente y_1^2:

$$y_1^2 = \frac{x_1^2 b^2 - a^2 b^2}{a^2} = \frac{x_1^2 b^2}{a^2} - b^2$$

Bastará ahora dividir por x_1^2, y resulta $\dfrac{y_1^2}{x_1^2} = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{b^2}{x_1^2}$

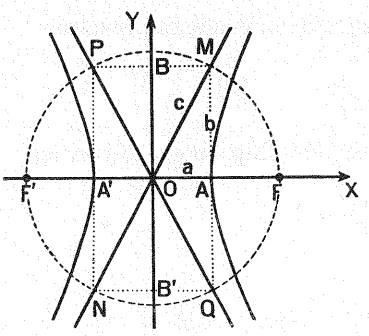

FIG. 92

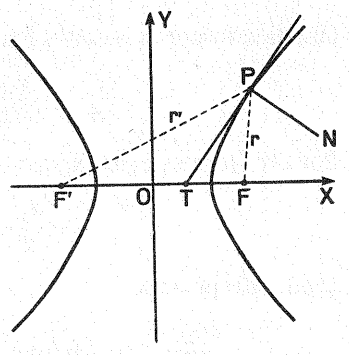

FIG. 93

153. Trazado de la tangente. — Se deduce inmediatamente de la siguiente propiedad: *La tangente a la hipérbola en uno de sus puntos es bisectriz del ángulo que forman los radios vectores de ese punto.*

En efecto: Consideremos la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y sea PT la tangente, $P(x_1, y_1)$ el punto de tangencia, y $r' = PF'$ y $r = PF$ los radios vectores correspondientes a ese punto (fig. 93).

Procediendo como para la elipse (146), se obtiene que la longitud de los radios vectores del punto de tangencia (x_1, y_1) es

$$PF' = r' = \frac{cx_1}{a} + a = \frac{cx_1 + a^2}{a}$$

$$PF = r = \frac{cx_1}{a} - a = \frac{cx_1 - a^2}{a}$$

y su cociente,

$$\frac{PF'}{PF} = \frac{cx_1 + a^2}{cx_1 - a^2}$$

Los segmentos $F'T$ y FT, determinados por la tangente PT, en el segmento $F'F$, tienen por medida

$$F'T = F'O + OT = c + \frac{a^2}{x_1} = \frac{cx_1 + a^2}{x_1}$$

$$FT = OF - OT = c - \frac{a^2}{x_1} = \frac{cx_1 - a^2}{x_1}$$

Luego, la razón de estos segmentos es

$$\frac{F'T}{FT} = \frac{cx_1 + a^2}{cx_1 - a^2} = \frac{PF'}{PF}$$

De donde se deduce que el lado $F'F$ del triángulo $F'PF$ queda dividido por la tangente PT en segmentos proporcionales a los otros dos lados PF' y PF. Por tanto, dicha tangente coincide con la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores, quedando así probado lo que nos proponíamos.

De la propiedad anterior se deduce que la normal PN a la hipérbola en uno de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por uno de los radios vectores de ese punto y la prolongación del otro.

154. Hipérbola equilátera: ecuación asintótica. — *Recibe el nombre de hipérbola equilátera la que tiene los dos ejes iguales.*

Para ella se verifica, por tanto, que

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \text{o sea} \quad c = a\sqrt{2}$$

Su ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$

y las de sus asíntotas

$$y = \frac{a}{a}x \qquad \text{o sea} \qquad x - y = 0$$

$$y = -\frac{a}{a}x \qquad \text{o sea} \qquad x + y = 0$$

Las asíntotas de la hipérbola equilátera son, por consiguiente, bisectrices de los ángulos que forman los ejes, y se cortan perpendicularmente.

ECUACIÓN ASINTÓTICA. — Sea la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, referida a sus ejes XY (fig. 94).

Como sus asíntotas se cortan en ángulo recto, podemos tomarlas como ejes cartesianos rectangulares. Llamemos a estos nuevos ejes $X'Y'$.

Supongamos un punto P perteneciente a la hipérbola, de coordenadas (x_1, y_1) respecto a los ejes de la curva, y de coordenadas (x'_1, y'_1) respecto a las asíntotas.

Teniendo en cuenta que para un sistema de ejes rectangulares (como es el que hemos elegido, formado por las asíntotas), hablar de coordenadas de un punto equivale a decir distancia de ese punto a los ejes, resulta que las coordenadas de $P(x'_1\ y'_1)$ serán sus distancias a las asíntotas.

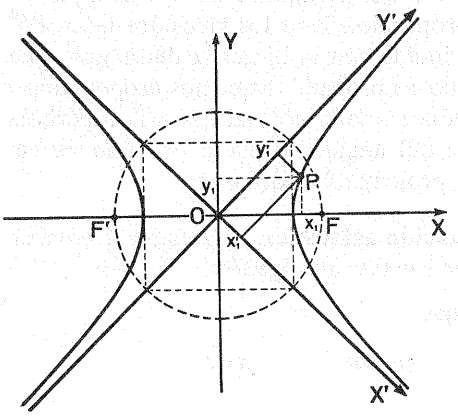

FIG. 94

Por consiguiente, en virtud de la fórmula que da la distancia de un punto a una recta (77), tendremos:

Distancia de P a OY'

(ecuación de OY': $x - y = 0$):

$$x'_1 = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}$$

Distancia de P a OX'

(ecuación de OX': $x + y = 0$):

$$y'_1 = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}$$

Multiplicando x'_1 por y'_1, se obtiene

$$x'_1 y'_1 = \frac{(x_1 - y_1)(x_1 + y_1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{x_1^2 - y_1^2}{2} = \frac{a^2}{2} = k$$

ya que, por pertenecer el punto (x_1, y_1) a la hipérbola, se verifica

$$x_1^2 - y_1^2 = a^2$$

Es decir que, si en la hipérbola equilátera tomamos por ejes de coordenadas a las asíntotas, el producto de la abscisa por la ordenada de cada punto es igual a la constante $k = \frac{a^2}{2}$. Luego, la *ecuación asintótica* (es decir, referida a las asíntotas) de la hipérbola equilátera es

$$\boxed{xy = k}$$

representando ya, como siempre, a la abscisa por x en vez de x', y a la ordenada por y en vez de y'.

Observemos que la ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas $xy = k$, no es sino la función representativa de la proporcionalidad inversa estudiada el curso pasado.

La hipérbola equilátera es, por consiguiente, la representación gráfica de la proporcionalidad inversa.

Muchos fenómenos físicos van expresados por una función de este tipo. Tal, por ejemplo, la ley de Boyle-Mariotte, cuya expresión matemática es

$$p \cdot v = k \qquad \text{o bien} \qquad v = \frac{k}{p}$$

y cuyo enunciado es el siguiente: *A temperatura constante, el volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión que soporta.*

EJERCICIOS

403. La distancia focal de una hipérbola es de 34 unidades, y la de un foco al vértice más próximo, de 2. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes?

404. Escribir la ecuación de la hipérbola cuyo eje imaginario mide 10 unidades y la distancia focal 26.

405. En una hipérbola, un foco dista de los vértices 50 y 2 unidades, respectivamente. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes?

406. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyo eje real mide 18 unidades y uno de sus puntos es $(-15, 4)$.

407. En una hipérbola, los extremos A y B de los ejes distan 15 unidades, y de un foco al vértice más próximo hay 3 unidades. Hallar la ecuación de la hipérbola.

408. Hallar los vértices, los focos y la excentricidad de las hipérbolas:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1; \qquad 2x^2 - 3y^2 = 30; \qquad 9x^2 - 16y^2 = 1.296$$

409. Hacer la construcción por puntos de las hipérbolas cuyo eje real y distancia focal miden: 1.°, 2 y 4 cm.; 2.°, 24 y 50 mm.; 3.°, 3 y 5 cm.

410. Construir las hipérbolas representadas por las ecuaciones:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1; \qquad \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1; \qquad 9x^2 - 16y^2 = 25$$

411. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $\left(3, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ y $(6, 2\sqrt{2})$.

412. Hallar los puntos de intersección de las hipérbolas y rectas siguientes:

1.° $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1, \quad 2x - 3y = 0;$ 2.° $4x^2 - 3y^2 = 1, \quad y = 2x - 1$

413. ¿Cómo es la recta $4x - y\sqrt{3} = 4$ respecto de la hipérbola $4x^2 - y^2 = 16$?

414. Calcular las intersecciones de la hipérbola $2x^2 - y^2 = 8$ con las bisectrices de los ángulos que forman los ejes.

415. Hallar las intersecciones de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$ con la elipse $x^2 + 4y^2 = 25$.

416. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la hipérbola $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{16} = 1$ en el punto $(15, -3)$.

417. Dada la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ y un punto de ella $(5, 8)$, comprobar que la tangente en ese punto es bisectriz del ángulo que forman los radios vectores.

418. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas:

$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1; \qquad 4x^2 - y^2 = 8; \qquad \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1; \qquad 4x^2 - 5y^2 = 20$

419. Calcular el ángulo que forman las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 8y^2 = 1$.

420. Hallar las intersecciones de las paralelas a las asíntotas trazadas por los focos de la elipse cuya distancia focal es 10 y el eje imaginario 6.

421. Hallar la distancia de los focos de la hipérbola $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ a las asíntotas.

422. Mediante las fórmulas de rotación de ejes, deducir la ecuación de hipérbola equilátera referida a sus asíntotas.

423. Hallar los puntos de intersección de la hipérbola $xy = -18$ con la recta $2x + y - 5 = 0$.

424. Hallar los puntos de intersección de la hipérbola $x^2 - y^2 = 5$ con la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$.

425. Una hipérbola equilátera pasa por el punto $(4, \frac{1}{2})$. Hallar su ecuación, las de sus ejes de simetría y las coordenadas de los vértices y de los focos.

21. La parábola

155. Definiciones. — Si cortamos a una superficie cónica por un plano que sea paralelo a una generatriz, la sección producida es una curva llamada *parábola* (fig. 95).

La parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto y de una recta, fijos en el plano.

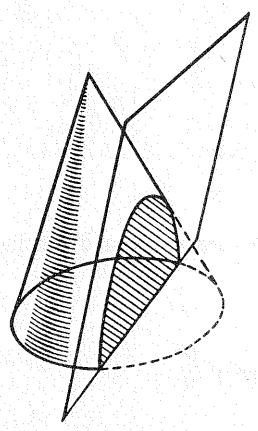

FIG. 95

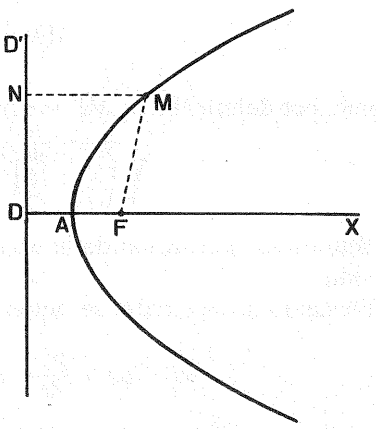

FIG. 96

El punto fijo *F* (fig. 96) se denomina *foco* de la parábola, y la recta fija *DD'*, *directriz*.

El segmento *MF* que une un punto de la parábola con el foco se llama *radio vector*.

La perpendicular *DX* a la directriz, trazada por el foco, es el *eje* de la parábola.

El punto *A*, en donde el eje corta a la curva, se llama *vértice* de la parábola.

El segmento de eje comprendido entre el foco y la directriz se denomina *parámetro* y se acostumbra a representar por *p*, es decir, $p = FD$.

156. Ecuación de la parábola. — Supongamos una parábola y tracemos por su vértice una perpendicular al eje.

Escojamos como eje de abscisas el de la curva, es decir, OX (fig. 97), y como eje de ordenadas la perpendicular citada OY. Por definición, el punto O equidista del foco y de la directriz; luego, se cumplirá

$$DO = OF = \frac{p}{2}$$

Según esto, tendremos:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2}$$

$$MN = x + \frac{p}{2}$$

y como, por definición, es $MF = MN$, resulta

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

Esta es ya la ecuación de la parábola; pero vamos a darle forma más cómoda.

Elevando al cuadrado, se obtiene

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

y reduciendo términos semejantes y despejando y^2, resulta

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad [1]$$

que es *la ecuación de la parábola, referida al eje y a la perpendicular a éste trazada por el vértice.*

De la ecuación [1] se deduce

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

lo que nos dice que a cada valor de x corresponden dos a y, iguales y de signos contrarios, o sea, que si un punto (x_1, y_1) pertenece a la curva, tam-

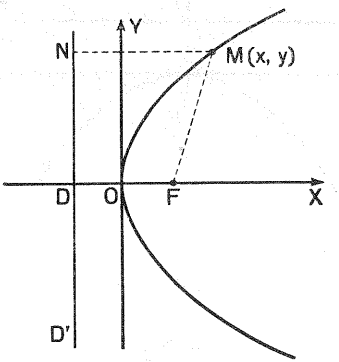

FIG. 97

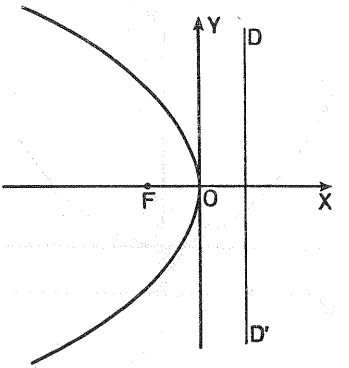

FIG. 98

bién pertenecerá el $(x_1, -y_1)$. Por consiguiente, *la parábola es simétrica respecto de su eje.*

De la ecuación anterior se deduce asimismo que no hay valores reales de y que correspondan a los negativos de x; luego, la curva está situada en la parte positiva del eje OX y tiene común con el eje OY solamente el origen, es decir, el vértice.

Si el parámetro p fuera negativo, la ecuación [1] tomaría la forma

$$y^2 = -2px \qquad [2]$$

y la curva estaría toda ella situada a la izquierda del eje OY (fig. 98).

Si al eje de la curva lo tomamos como eje de ordenadas, y a la perpendicular trazada por el vértice, como eje de abscisas, la ecuación [1] se transforma en

$$x^2 = 2py \quad \text{o bien} \quad y = \frac{1}{2p}x^2$$

y la curva estará situada toda ella encima del eje OX (fig. 99), si p es positivo; o bien debajo de ese mismo eje, si p es negativo (fig. 100).

EJEMPLOS. — 1) La ecuación $3y^2 - 16x = 0$ representa una parábola, puesto que puede ponerse en la forma

$$y^2 = 2 \cdot \frac{8}{3}x$$

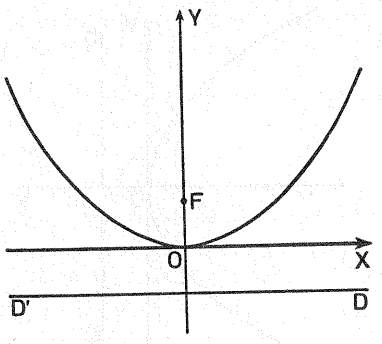

FIG. 99

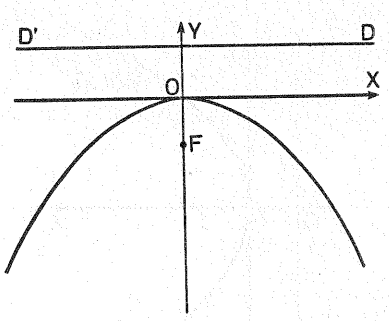

FIG. 100

En dicha parábola, p viene representado por $\frac{8}{3}$, su eje es el eje de abscisas, el foco es el punto $F\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, y la ecuación de la directriz es $x = -\frac{4}{3}$.

2) La ecuación $3y^2 + 16x = 0$ representa también una parábola, cuya ecuación en forma reducida es

$$y^2 = 2\left(-\frac{8}{3}\right)x$$

el parámetro es $p = -\frac{8}{3}$, su eje es el eje de abscisas, está situada a izquierda del eje OY (p es negativo), el foco es el punto $F\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, y la directriz es la recta $x = \frac{4}{3}$.

3) La ecuación $x^2 - 4y = 0$ representa una parábola, cuya ecuación en forma reducida es

$$x^2 = 2 \cdot 2y \quad \text{o bien} \quad y = \frac{1}{2 \cdot 2}x^2$$

el parámetro es $p = 2$, su eje es el eje de ordenadas, está situada encima del eje OX (p es positivo), el foco es el punto $F(0, 1)$, y la directriz es la recta $y = -1$.

4) La ecuación $x^2 + 4y = 0$ representa también una parábola, cuya ecuación en forma reducida es

$$x^2 = -2 \cdot 2y \quad \text{o bien} \quad y = \frac{1}{2(-2)}x^2$$

el parámetro es $p = -2$, su eje es el eje de ordenadas, está situada debajo del eje OX (p es negativo), el foco es el punto $F(0, -1)$, y la directriz es la recta $y = 1$.

157. Construcciones gráficas. — La construcción de la parábola puede efectuarse *por trazo continuo* o *por puntos,* cuando se conoce el foco y la directriz.

I. POR TRAZO CONTINUO. — Nos serviremos de una regla, una escuadra y un hilo de longitud igual al cateto mayor de la escuadra (fig. 101).

Se traza primeramente la recta *DD'* que ha de servir de directriz, y un punto *F,* que será el foco. Se fija luego un extremo del hilo en el vértice *E* de la escuadra, y el otro en el punto *F* elegido para foco. Se hace después que el borde de la regla coincida con la directriz, y que el cateto menor de la escuadra se apoye en la regla.

Con un lápiz se pone tenso el hilo, de manera que el lápiz toque siempre el borde de la escuadra, y al mismo tiempo se hace que ésta resbale sobre la regla, con lo que el lápiz irá describiendo la curva. Ésta será una parábola, puesto que cualquiera de sus puntos, el *M* por ejemplo, se halla a igual distancia del foco y de la directriz, distancia que es igual a la diferencia entre la longitud del cateto mayor de la escuadra y la parte de hilo *ME* que coincide con él.

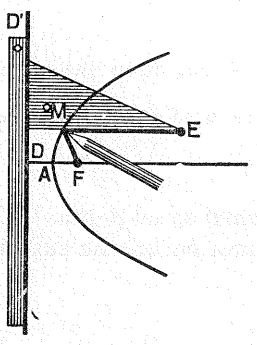

FIG. 101

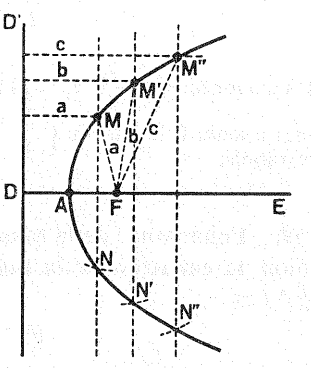

FIG. 102

II. POR PUNTOS. — Se traza en primer lugar la perpendicular a la directriz que pasa por el foco (fig. 102). El punto medio *A* de *DF* es ya un punto de la curva. Se trazan luego del lado del foco diversas paralelas a la directriz, y con un compás se toman las distancias de las paralelas a la directriz: distancias *a, b, c,* ... Con estas distancias como radios y haciendo centro en el foco *F,* se cortan por medio de arcos las respectivas

paralelas. Obtendremos así los puntos M y N, M' y N', M'' y N'', ..., que son puntos de la parábola, puesto que equidistan del foco y de la directriz. Bastará luego unir todos esos puntos con un trazo continuo para obtener la curva.

Como las paralelas MN, $M'N'$, etc., pueden trazarse tan distantes de A como se quiera, resulta que la parábola tiene puntos cada vez más alejados, por lo que sólo puede dibujarse una parte de ella.

158. Intersecciones de la parábola con una recta. — Para obtener los puntos comunes a una parábola y a una recta, basta resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambas.

La recta puede ser *secante, tangente* o *exterior* a la parábola, según que las soluciones del sistema sean dos, una o ninguna.

EJEMPLO. — Los puntos de intersección de la parábola $y^2 = 3x$ con la recta $2x + 5y - 9 = 0$, se obtienen resolviendo el sistema

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 3x \\ 2x + 5y - 9 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

cuyas soluciones $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 27$; $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = -9$, nos dicen que los puntos comunes a ambas líneas son $\left(\frac{3}{4}\ \frac{3}{2}\right)$ y $(27, -9)$. La recta es, por tanto, secante a la parábola.

159. Ecuaciones de la tangente y de la normal en un punto. — Como sabemos, la ecuación de la tangente a una curva en uno de sus puntos (x_1, y_1), es

$$y - y_1 = y'_1(x - x_1)$$

siendo y'_1 el valor de la derivada en el punto considerado.

Derivando la expresión $y^2 = 2px$, que es la función que representa a la parábola, tenemos:

$$2y \cdot y' = 2p$$

de donde

$$y' = \frac{p}{y} \qquad \text{y para el punto } (x_1, y_1) \qquad y'_1 = \frac{p}{y_1}$$

Sustituyendo en la primera ecuación y'_1 por este valor, resulta

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

Quitando denominadores y sustituyendo y_1^2 por su valor $2px_1$, la ecuación anterior se transforma en

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

que es otra forma más sencilla de la *ecuación de la tangente.*

Como el coeficiente angular de la tangente es

$$\frac{p}{y_1} \quad \text{el de la normal será} \quad -\frac{y_1}{p}$$

y, por tanto, la *ecuación de la normal* tendrá la forma

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

EJEMPLO. — Las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $y^2 = 8x$ en el punto (2, 4) son, respectivamente:

$$4y = 4(x+2) \qquad \text{o su equivalente} \qquad y - x - 2 = 0$$

$$y - 4 = -\frac{4}{4}(x-2) \qquad \text{o su equivalente} \qquad x + y - 6 = 0$$

160. Trazado de la tangente. — Se deduce de la siguiente

PROPIEDAD. — *La tangente a la parábola es bisectriz del ángulo exterior formado por el radio vector del punto de contacto y la paralela al eje trazada por dicho punto.*

En efecto: Consideremos una parábola y una tangente a ella *PT* (figura 103) en el punto $P(x_1, y_1)$.

Para demostrar que *PT* es bisectriz del ángulo *DPF*, basta probar que la tangente *PT* es perpendicular a *DF*, puesto que por definición de parábola el triángulo *DPF* es isósceles. Se tiene:

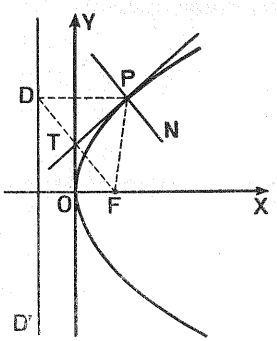

FIG. 103

Ecuación de PT:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

Ecuación de DF: Por pasar por los puntos $D\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$ y $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ será (70)

$$y - 0 = \frac{0 - y_1}{\frac{p}{2} + \frac{p}{2}}\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

es decir $$y = -\frac{y_1}{p}\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

Como se ve, estas dos rectas tienen sus coeficientes angulares recíprocos y de signos contrarios; luego, son perpendiculares. Queda, por tanto, probada la propiedad enunciada.

EJERCICIOS

426. Escribir en forma reducida las ecuaciones de las siguientes parábolas, e indicar: 1.º, el valor del parámetro; 2.º, la situación de la curva respecto del eje OY o del eje OX; 3.º, las coordenadas del foco; 4.º, la ecuación de la directriz:

$6y^2 - 12x = 0$; $2y^2 = -7x$; $15x^2 = -42y$; $9x^2 - 38y = 0$

427. Escribir las ecuaciones de las parábolas que tienen:

a) De directriz, $x = -3$; de foco, $F(3, 0)$.
b) De directriz, $y = 4$; de vértice, $O(0, 0)$.
c) De directriz, $y = -5$; de foco, $F(0, 5)$.
d) De directriz, $x = 2$; de foco, $F(-2, 0)$.

428. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $y = 3$ y del punto $(0, -3)$.

429. Empleando el trazado por puntos, construir una parábola cuyo parámetro sea:

a) $p = 14$ mm.; *b)* $p = 12$ mm.; *c)* $p = 1'5$ cm.; *d)* $p = 2$ cm.

430. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola $x^2 = 6y$ con la recta $2x + 5y - 18 = 0$?

431. ¿Cómo es la recta $y = 3x - 2$ respecto de la parábola $y^2 = 8x$?

432. Determinar b para que la recta $y = x + b$ sea tangente a la parábola $y^2 = 4x$.

433. Hallar los puntos comunes de la parábola $3x^2 = 16y$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

434. Dada la parábola $y^2 = 2x$ y la abscisa $x = \frac{1}{8}$ del punto de tangencia, hallar las ecuaciones de las tangentes y de las normales a la curva.

435. Dada la parábola $y^2 = 2px$, hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto (2, 4).

436. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $y^2 = 4x$ en el punto (1, 2).

437. La ecuación $y = x^2 - 2x - 15$ representa a una parábola referida a dos paralelas al eje y a su perpendicular trazada por el vértice, respectivamente. Se piden las ecuaciones de las tangentes y de las normales en los puntos de intersección con el eje XX'.

438. Dada la parábola $y^2 = 4x$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el foco y es paralela a la tangente en el punto (9, 6).

439. Las tangentes a la parábola $y^2 = 4x$ en los puntos de ordenadas $y = 4$ e $y = 6$ forman con la recta que une dichos puntos un triángulo. Se pide hallar el área del mismo.

440. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola $y = 4x^2 + x - 20$ con las bisectrices de los cuatro cuadrantes formados por los ejes coordenados. Dichos puntos son vértices de un cuadrilátero. Se pide hallar el área del mismo.

441. Hallar las coordenadas de los puntos en que las bisectrices de los ángulos formados por los ejes coordenados cortan a la parábola $y = x^2 - 6x$. Dichos puntos son vértices de un triángulo. Se pide calcular el área del mismo.

442. Hallar las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ con la parábola $y^2 = 3x$.

443. Hallar las intersecciones de las parábolas $y^2 = 4x$, $x^2 = \frac{1}{2}y$.

444. Empleando las fórmulas de traslación de eje, deducir la ecuación de la parábola referida a su eje y a la directriz.

445. Mediante las fórmulas de traslación de ejes, deducir la ecuación de la parábola referida a dos paralelas al eje y a la perpendicular a éste por el vértice.

22. La función primitiva

161. Concepto de función primitiva. Integral indefinida. — En lecciones anteriores, hemos estudiado los procedimientos para calcular la derivada, o la diferencial, de una función. En muchas cuestiones se presenta el problema inverso; es decir, dada una función, hallar otra cuya derivada sea igual a la primera. A esta segunda función se le llama *función primitiva.*

Función primitiva de una función f(x) *es otra función* F(x) *cuya derivada es* f(x), *o cuya diferencial es* f(x) dx.

Sumando a $F(x)$ una constante arbitraria C, resulta una nueva primitiva de $f(x)$, ya que la derivada sigue siendo $f(x)$. Diremos, por tanto, que toda función del tipo $F(x) + C$ es una primitiva de $f(x)$, pues si derivamos se obtiene

$$D[F(x)+C] = F'(x) + 0 = f(x)$$

Luego: *A una función le corresponden infinitas funciones primitivas, que se obtienen añadiendo a una de ellas una constante arbitraria.*

El conjunto $F(x) + C$ de todas las primitivas de una misma función $f(x)$ se llama *integral indefinida* de $f(x)$.

EJEMPLO. — Una función primitiva de $5\,x^4$ es x^5, puesto que la derivada de x^5 es $5\,x^4$. Y todas las funciones primitivas de $5\,x^4$ estarán comprendidas en la expresión $x^5 + C$.

162. Notación. — Para indicar que la función $y = F(x) + C$ es la integral indefinida o conjunto de funciones primitivas de $f(x)$ se usa la notación

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

que se lee «integral indefinida de $f(x)$ por diferencial x es igual a $F(x)+C$».

La función $f(x)$ se llama *integrando,* y el signo $\int$, *signo de integración.*

De acuerdo con la definición de función primitiva y a la vista de la igualdad anterior, se deduce que

$$y' = f(x) \qquad \text{y} \qquad dy = f(x)\,dx$$

163. Cálculo de funciones primitivas. — La *integración* o cálculo de funciones primitivas es la operación inversa de la derivación, o diferenciación. Por tanto, una tabla de derivadas es también una tabla de funciones primitivas. En el párrafo 166 escribiremos con la notación integral algunas de estas funciones primitivas, en los casos más sencillos.

A continuación enunciamos dos propiedades generales.

1.ª Por ser la derivada de una suma de funciones igual a la suma de las derivadas de los sumandos, también: *La primitiva o integral indefinida de una suma de funciones será igual a la suma de sus respectivas primitivas.*

Esto lo expresamos escribiendo

$$\int [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx \qquad [1]$$

2.ª Del mismo modo, por ser la derivada del producto de una constante por una función igual al producto de esa constante por la derivada de la función, también: *La primitiva o integral indefinida de un producto de una constante por una función será igual al producto de la constante por la integral de la función.*

Para expresarlo, escribiremos

$$\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx \qquad [2]$$

164. Función primitiva de la potencial. — Vimos que la derivada de la función potencial x^m, es igual al exponente multiplicado por la base elevada al mismo exponente disminuído en una unidad. Por tanto, para calcular la función primitiva procederemos en orden inverso, es decir, *aumentaremos en una unidad al exponente y dividiremos la potencia que ha resultado por el nuevo exponente.*

Así, la función primitiva de

$$x^m \quad \text{vendra expresada por} \quad y = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

En efecto: derivando la segunda función, resulta la primera:

$$y' = \frac{1}{m+1}(m+1)\,x^m = x^m$$

Luego, empleando la notación integral y añadiendo la constante de integración, tendremos

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \qquad [3]$$

OBSERVACIONES. — 1.ª La fórmula anterior no puede utilizarse cuando $m = -1$, porque entonces se anula el denominador y no es posible la división por cero. En ese caso, como $x^{-1} = \frac{1}{x}$ y la derivada de $\ln x$ es $\frac{1}{x}$ pondremos

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

2.ª Si $m = -\frac{1}{2}$, resulta el caso particular de uso frecuente

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

EJEMPLOS: 1) $\int dx = \int x^0 dx = x + C$; 2) $\int 3x^5 dx = 3\int x^5 dx = \frac{x^6}{3} + C$

3) $\int 4\sqrt[3]{x}\,dx = 4\int x^{\frac{1}{3}}dx = 4\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = 3x^{\frac{4}{3}} + C$

4) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

165. Función primitiva de un polinomio entero. — Como un polinomio entero es una suma de constantes por funciones potenciales de exponentes naturales, para hallar su función primitiva bastará aplicar sucesivamente las fórmulas [1], [2] y [3].

Sea, por ejemplo, hallar la función primitiva del polinomio x^3+2x^2+5.

Se tiene:

$$\int (x^3+2x^2+5)\,dx = \int x^3dx + \int 2x^2dx + \int 5x^0dx =$$

$$= \int x^3dx + 2\int x^2dx + 5\int x^0dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 5x + C$$

Como se ve, *la integral o primitiva de un polinomio es otro polinomio de grado superior en una unidad.*

166. Primitivas de algunas funciones trascendentes. — Si recordamos que

1) $D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

2) $D(a^x) = a^x \ln a$

3) $D(e^x) = e^x$

4) $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$

5) $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

6) $D(\operatorname{tg} x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

obtendremos inmediatamente

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

2) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

3) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

4) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$

5) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

EJEMPLOS:

1) $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{x} = 7\int \frac{dx}{x} = 7 \ln x + C$

2) $\displaystyle\int 3 \cdot 5^x\, dx = 3\int 5^x\, dx = 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + C$

3) $\displaystyle\int (4x^3 + e^x)\, dx = 4\int x^3\, dx + \int e^x\, dx = 4\,\frac{x^4}{4} + e^x + C = x^4 + e^x + C$

4) $\displaystyle\int (3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x)\, dx = 3\int \operatorname{sen} x\, dx + 2\int \cos x\, dx = -3 \cos x + 2 \operatorname{sen} x + C$

5) $\displaystyle\int -\operatorname{sen} 2x\, dx = \tfrac{1}{2}\int -2 \operatorname{sen} 2x\, dx = \tfrac{1}{2} \cos 2x + C$

6) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1)\, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx - \int dx =$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

EJERCICIOS

Calcular las siguientes integrales indefinidas y comprobar el resultado por diferenciación:

446. $\int 8\,x^3\,dx$

447. $\int \frac{x}{3}\,dx$

448. $\int (x^3 - x^2)\,dx$

449. $\int (x^5 - 4)\,dx$

450. $\int (x^4 - x^3 - 1)\,dx$

451. $\int (3\,x^2 - 2\,x^3)\,dx$

452. $\int (2\,x^4 - 4\,x^3 + 6\,x^2 + x - 3)\,dx$

453. $\int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$

454. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,dx$

455. $\int \frac{3\,x^2}{2}\,dx$

456. $\int \frac{2}{x}\,dx$

457. $\int \frac{e^x}{4}\,dx$

458. $\int \frac{4}{e^x}\,dx$

459. $\int 4 \cdot 4^x\,dx$

460. $\int \frac{4}{4^x}\,dx$

461. $\int (3\,x^2 + e^x)\,dx$

462. $\int (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

463. $\int (2\,x^3 + 3 \operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

464. $\int 2 \cos x\,dx$

465. $\int \frac{\cos x}{2}\,dx$

466. $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$

467. $\int (2 + \cos x)\,dx$

468. $\int (1 + \operatorname{tg} x)\,dx$

469. $\int 3 \cos (x - 1)\,dx$

470. Calcular $\int (4x^3 - 7x^2 + 5x - 1)\,dx$ y hallar el valor de la constante de integración, sabiendo que la función primitiva se anula para $x = 1$.

471. Hallar la función que tome el valor -2 para $x = -1$ y cuya derivada sea $12\,x^2 + 6$.

472. Determinar la función primitiva del polinomio $4\,x^2 - 6\,x - 5$ que se anula para $x = -1$.

23. La integral definida

167. El problema del cálculo del área. — En Geometría elemental, para hallar el área de un polígono irregular, lo descomponíamos en triángulos y trapecios y sumábamos luego las áreas de éstos.

Recordemos también que para obtener el área de un círculo lo considerábamos como límite de las áreas de polígonos inscritos cuyo número de lados crece indefinidamente; y como a su vez un polígono se puede considerar como una suma de triángulos con un vértice en el centro del círculo y las bases en los lados del polígono, resulta que el área del círculo es el límite de una suma de áreas en la que cada uno de los sumandos tiende a cero al mismo tiempo que su número crece infinitamente.

En esta lección trataremos de investigar un método general que permita calcular las áreas de figuras irregulares, limitadas no sólo por líneas rectas o curvas, sino por ambas a la vez. El concepto de integral, unido al de suma y límite, nos facilitará el medio para llegar a ese método general de cálculo, según vamos a ver.

168. Integral definida. — Sea una función continua $y = f(x)$ cuya curva representativa es la dibujada en la figura 104. Queremos definir y calcular el área S del recinto mixtilíneo $ABCD$ limitado por el intervalo (a, b), el arco de curva correspondiente a dicho intervalo, y las ordenadas de los extremos del intervalo.

Dividamos al intervalo (a, b) en n partes iguales (en la figura $n = 4$), y por los puntos de abscisas $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, tracemos las correspondientes ordenadas, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. En los subintervalos considerados habrá una ordenada máxima y otra mínima, con las cuales se forman rectángulos como se indica en la figura.

Las bases de estos rectángulos son

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$$

que, en general, podemos representar por Δx.

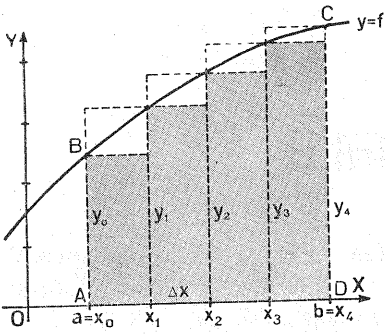

FIG. 104

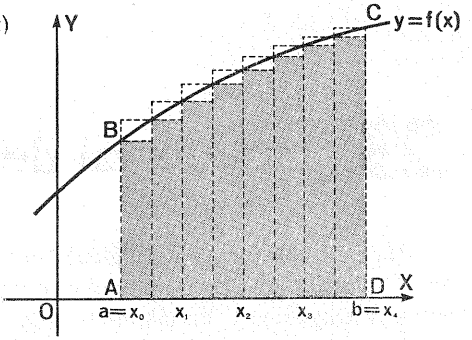

FIG. 105

La suma S_1 de las áreas de los rectángulos que resultan al tomar la ordenada mínima de cada intervalo (rectángulos sombreados), es

$$S_1 = y_0 \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + y_3 \cdot \Delta x = \sum_{n=0}^{n=3} y_n \cdot \Delta x \qquad [1]$$

y la suma S_2 de las áreas de los rectángulos que tienen por altura la ordenada máxima de cada intervalo (rectángulos completos), será

$$S_2 = y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + y_3 \cdot \Delta x + y_4 \cdot \Delta x = \sum_{n=1}^{n=4} y_n \cdot \Delta x \qquad [2]$$

Evidentemente, la suma [1] es menor que el área *ABCD* buscada, mientras que la [2] es mayor. Es decir, tendremos la limitación

$$S_1 < S < S_2$$

y la diferencia $S_2 - S_1$, será

$$S_2 - S_1 = \sum_{n=1}^{n=4} y_n \cdot \Delta x - \sum_{n=0}^{n=3} y_n \cdot \Delta x = (y_4 - y_0)\,\Delta x$$

Si ahora hacemos crecer el número n de partes en que dividimos al intervalo (a, b), las bases de los rectángulos disminuyen y las sumas de sus áreas se aproximan cada vez más a la *ABCD*. Esto se aprecia claramente comparando las figuras 104 y 105: en la segunda, la parte sombreada es mayor, mientras que la blanca ha quedado reducida.

Y si hacemos a n infinitamente grande, es decir, si $n \longrightarrow \infty$, las bases de los rectángulos tenderán a cero ($\Delta x \longrightarrow 0$), y, por tanto, también tenderá a cero la diferencia

$$S_2 - S_1 = (y_n - y_0)\,\Delta x$$

lo que significa que, al tender n a ∞, las sumas $\Sigma\, y_n \cdot \Delta x$ tienden a S. Luego, podemos escribir

$$S = \lim_{n \to \infty} \Sigma\, y_n \cdot \Delta x$$

que es el límite de una suma de infinitos sumandos infinitésimos.

Cuando el número de sumandos es indefinidamente grande y estos sumandos tienden a cero, como sucede en el presente caso, para expresar el límite de la suma no se usa el signo sumatorio Σ sino el signo integral $\int$, propuesto por Leibnitz, y que no es sino una s deformada.

Si además se tiene en cuenta que al tender a cero Δx se acostumbra a designar por dx, y que y_n representa el valor que toma la función $f(x)$ al recorrer x el intervalo (a, b), la expresión anterior se convierte en

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

que se lee «integral definida entre a y b de $f(x)\,dx$».

A los números a y b se les denomina *límites de integración, inferior* y *superior,* respectivamente.

Resumiendo lo que precede, diremos: *Se llama integral definida de una función continua* y = f(x), *entre los valores* a *y* b *de la variable, al valor del área limitada por la curva de la función, el eje* XX′ *y las ordenadas* y_a *e* y_b *correspondientes a las abscisas* a *y* b.

Con el fin de facilitar la demostración, hemos considerado que los subintervalos en que se ha dividido al intervalo (a, b) eran iguales, pero esta condición no es necesaria; basta con que dichas partes, aunque sean desiguales, tiendan a cero, cuando n lo haga a infinito.

Más adelante (171) veremos la regla que ha de seguirse para el cálculo de las integrales definidas.

169. Teorema de la media. — Consideremos una función $f(x)$ cuyos valores mínimo y máximo en el intervalo (a, b) sean h y H, respectivamente (fig. 106).

El área del recinto mixtilíneo situado debajo de la curva está comprendida entre las áreas de los rectángulos de base $b - a$ y alturas h y H, es decir,

$$(b-a)\,h < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,H$$

o bien, dividiendo por $b - a$,

$$h < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < H$$

Por consiguiente, ha de existir un número m, comprendido entre h y H, tal que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = m$$

de donde,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,m}$$

El valor m se llama valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b), y la fórmula anterior expresa que el área limitada por la curva es igual a la de un rectángulo de base igual a $b - a$, y de altura igual al valor medio de la función.

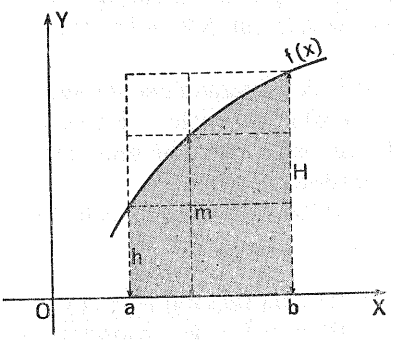

FIG. 106

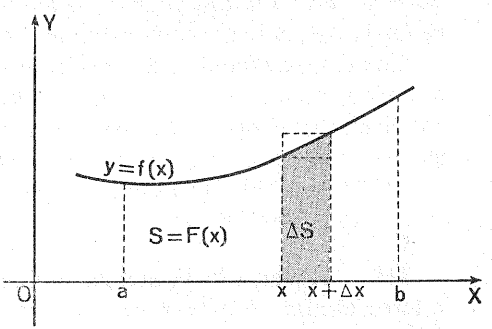

FIG. 107

170. Relación entre el área y la función primitiva. — Sea una curva de ecuación $y = f(x)$, definida en un intervalo (a, b) (fig. 107). El área limitada por esta curva, el eje de abscisas, la ordenada fija $f(a)$ y la ordenada variable $f(x)$, depende exclusivamente de x, una vez fijada la curva. Si designamos dicha área por S, podremos escribir

$$S = F(x)$$

Al incrementar la abscisa x en Δx, la función $S = F(x)$ viene incrementada en ΔS (parte sombreada), y tendremos

$$S + \Delta S = F(x+\Delta x)$$

Restando estas dos igualdades, se obtiene

$$\Delta S = F(x+\Delta x) - F(x)$$

y como ΔS está comprendido entre un rectángulo de base Δx y altura $f(x)$ y otro de igual base Δx y altura $f(x+\Delta x)$, se verificará

$$f(x) \cdot \Delta x < \Delta S < f(x+\Delta x) \cdot \Delta x$$

o bien, dividiendo por Δx,

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x+\Delta x)$$

Cuando $\Delta x \longrightarrow 0$, resulta

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = F'(x)$$

Por tanto, de acuerdo con la definición de función primitiva, será

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C$$

es decir, que *el área* F(x) *es una función primitiva de* f(x).

Si queremos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir, el área del recinto limitado por la curva $f(x)$, el eje de abscisas y las ordenadas fijas $f(a)$ y $f(b)$, comen-

zaremos por hallar una primitiva cualquiera $F(x)$ de la función $f(x)$, con lo que tendremos

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C \qquad [1]$$

Esto ocurre para todo valor de x; luego, también se cumplirá para $x = a$. Pero $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, por representar el área de un recinto en el que las dos ordenadas extremas coinciden. Por tanto, será

$$0 = F(a) + C \quad \text{de donde} \quad C = -F(a)$$

y teniendo en cuenta este valor de C, la ecuación [1] es equivalente a

$$\boxed{\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C = F(x) - F(a)}$$

que es la *fórmula fundamental del Cálculo integral*, por la que el difícil problema del cálculo de áreas queda reducido al cálculo de integrales indefinidas o funciones primitivas.

Para $x = b$, se tiene

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

que también suele escribirse así

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) \Big]_a^b$$

171. Cálculo de áreas sencillas. — De lo expuesto en el párrafo anterior se deduce que para calcular el área de un recinto limitado por la curva $f(x)$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a las abscisas a y b, bastará efectuar las operaciones siguientes:

1.ª *Se halla una función primitiva de* f(x).

2.ª *Se calculan los valores numéricos que dicha función primitiva toma al hacer* x = a *y* x = b.

3.ª *Se resta el primer valor del segundo, con lo que se obtendrá el área buscada.*

Veamos algunos ejemplos sencillos:

EJEMPLO 1.º — *Hallar el área del triángulo limitado por la recta* $y = \frac{7}{4}x$, *el eje* OX *y la ordenada correspondiente a* $x = 4$.

El área en cuestión vendrá representada por

$$\int_0^4 \frac{7}{4}\,x\,dx$$

1.ª operación:

$$\int \frac{7}{4}\,x\,dx = \frac{7}{8}\,x^2 = F(x)$$

2.ª operación:

$$F(0) = 0; \qquad F(4) = \frac{7}{8} \cdot 4^2 = 14$$

3.ª operación:

$$F(4) - F(0) = 14 - 0 = 14$$

Luego, el área pedida es 14.

Hagamos la comprobación geométrica (fig. 108): Como a la abscisa $x = 4$ le corresponde la ordenada $y = \frac{7}{4} \cdot 4 = 7$, tendremos:

$$S = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{4 \times 7}{2} = 14$$

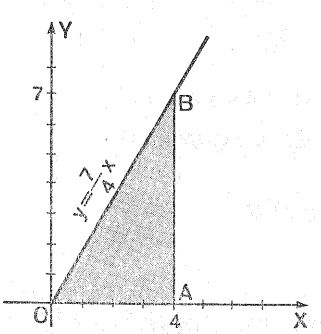

FIG. 108

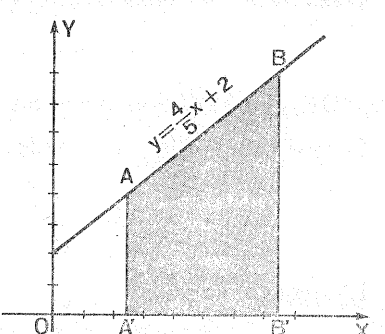

FIG. 109

EJEMPLO 2.° — *Hallar el área del trapecio limitado por la recta* $y = \frac{4}{5}x + 2$, *el eje de las* X *y las ordenadas correspondientes a* $x = 2'5$ *y* $x = 7'5$.

Para resolver el problema hemos de calcular

$$\int_{2'5}^{7'5} \left(\frac{4}{5}x + 2\right) dx$$

1.ª operación:

$$\int \left(\frac{4}{5}x + 2\right) dx = \frac{2}{5}x^2 + 2x = F(x)$$

2.ª operación:

$$F(2'5) = 7'5; \qquad F(7'5) = 37'5$$

3.ª operación:

$$F(7'5) - F(2'5) = 37'5 - 7'5 = 30$$

Luego, 30 es el área pedida.

Comprobación geométrica (fig. 109):

$$S = \frac{AA' + BB'}{2} \times A'B' = \frac{4 + 8}{2} \times 5 = 30$$

EJEMPLO 3.° — *Hallar el área limitada por la curva (parábola)*

$$y = x^2 + 2x + 5$$

el eje OX, *el eje* OY *y la ordenada correspondiente a* $x = 3$.

El área pedida (fig. 110) vendrá dada por la expresión

$$S = \int_0^3 (x^2 + 2x + 5)\, dx$$

1.ª operación:

$$\int (x^2 + 2x + 5)\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x = F(x)$$

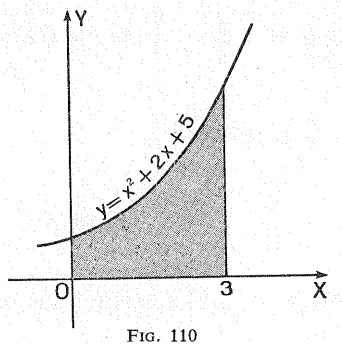

FIG. 110

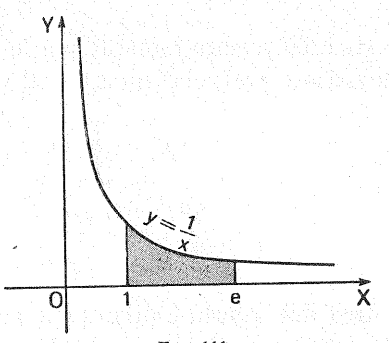

FIG. 111

2.ª operación:

$$F(0) = 0; \qquad F(3) = 33$$

3.ª operación:

$$F(3) - F(0) = 33 - 0 = 33$$

Luego, el área pedida es 33.

EJEMPLO 4.º — *Calcular el área limitada por la curva (hipérbola equilátera)* $y = \frac{1}{x}$, *el eje* OX *y las ordenadas correspondientes a las abscisas* $x = 1$ *y* $x = e$ (fig. 111).

Reuniendo las diversas operaciones en una sola expresión, como suele hacerse en la práctica, tendremos:

$$S = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^e = 1 - 0 = 1$$

EJEMPLO 5.º — *Calcular el área comprendida entre la hipérbola* $y = \frac{2}{x}$ *y la recta* $x + 7y - 9 = 0$ (fig. 112).

Para determinar los límites de integración, resolveremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{2}{x} \\ x + 7y - 9 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{o su equivalente} \quad \left\{\begin{aligned} y &= \frac{2}{x} \\ y &= -\frac{x}{7} + \frac{9}{7} \end{aligned}\right.$$

con lo que resultan para x los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$.

Área del recinto limitado por la recta $y = -\frac{x}{7} + \frac{9}{7}$, el eje OX y las ordenadas correspondientes $x = 2$ y $x = 7$:

$$S_1 = \int_2^7 \left(-\frac{x}{7} + \frac{9}{7} \right) dx =$$

$$\left[-\frac{x^2}{14} + \frac{9x}{7} \right]_2^7 = \frac{77}{14} - \frac{32}{14} = \frac{45}{14} = 3'1428$$

Área del recinto limitado por la curva $y = \frac{2}{x}$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 2$ y $x = 7$.

$$S_2 = \int_2^7 \left(\frac{2}{x} \right) dx = 2 \left[\ln x \right]_2^7 = 2 \times \frac{1}{M} (\log 7 - \log 2) =$$

$$= 2 \times 2'3025 \times 0'5440 = 2'5051$$

Área pedida:

$$S = S_1 - S_2 = 3'1428 - 2'5051 = 0'6377$$

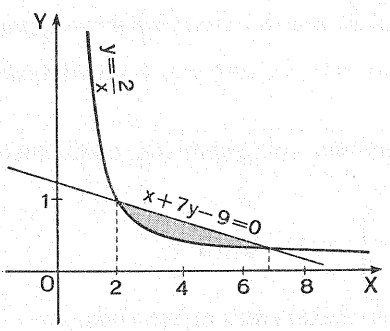

FIG. 112

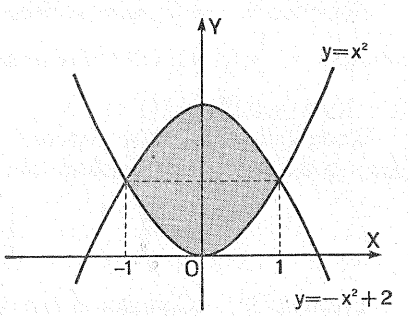

FIG. 113

EJEMPLO 6.°—*Hallar el área comprendida entre las curvas* $y = -x^2 + 2$ *e* $y = x^2$ (fig. 113):

Los límites de integración se obtienen resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 2 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \text{ de donde resulta } \quad x_1 = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = -1$$

El área pedida será, por tanto:

$$S = \int_{-1}^{1} (-x^2+2)\,dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

EJERCICIOS

Dibujar y sombrear las siguientes áreas:

473. $\int_3^8 (x+3)\,dx$ **475.** $\int_0^3 (x^2+x)\,dx$ **477.** $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

474. $\int_0^5 2x\,dx$ **476.** $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ **478.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$

Calcular las siguientes integrales definidas:

479. $\int_1^4 2x\,dx$ **482.** $\int_1^8 x^{\frac{2}{3}}\,dx$ **485.** $\int_{-1}^{2} (3x^2+2x+1)\,dx$

480. $\int_2^3 3x^2\,dx$ **483.** $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ **486.** $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$

481. $\int_3^4 4x^3\,dx$ **484.** $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ **487.** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx$

488. Hallar por integración el área del triángulo limitado por la recta $y = 3x$, el eje OX y la ordenada correspondiente a $x = 5$. Comprobar el resultado geométricamente.

489. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje OX y la ordenada correspondiente a $x = 4$.

490. Hallar el área del trapecio limitado por la recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a $x = 0$ y $x = 4$. Comprobar el resultado.

491. Hallar el área limitada por la curva $y = \frac{1}{2}x^2$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 0'5$ y $x = 2$.

492. Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $x - y + 3 = 0$.

493. Calcular el área limitada por la curva $y = -x^2 + 4$ y el eje OX.

494. Calcular el área comprendida entre la sinusoide (gráfica de $y = \operatorname{sen} x$), el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 0$ y $x = \pi$.

495. Calcular el área limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$, el eje de ordenadas, la recta $y = 2$ y la ordenada correspondiente a $x = \pi$.

496. Hallar el área comprendida entre la curva $f(x) = x^3 + 8$, el eje XX' y las ordenadas $f(-2)$ y $f(-1)$.

497. Hallar el área comprendida entre la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$ y la recta $2x + 3y - 7 = 0$.

498. Hallar el área limitada por la gráfica de la función $y = \cos x$, el eje XX' y las ordenadas correspondientes a $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

499. Calcular el área del triángulo limitado por el eje de abscisas y las rectas $y = x$; $3x + 2y = 12$.

500. La curva $y = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ corta al eje de abscisas en tres puntos. Hallar el área de los dos segmentos parabólicos que forma con el citado eje.

501. Hallar por integración el área del triángulo que forman las rectas:

$$y = \frac{x}{2} + 2; \qquad y = -2x - 3; \qquad y = \frac{x}{3} + 4$$

502. Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 + 5x - 4$, hallar por integración el área del triángulo limitado por los ejes coordenados y la tangente en el punto de abscisa $x = 3$.

503. Hallar el área comprendida entre las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

504. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x^3$.

24. Aplicaciones del cálculo integral

172. Volumen de un cuerpo definido por una integral. — En el cálculo de volúmenes se puede utilizar un procedimiento análogo al empleado para hallar un área.

Consideremos un cuerpo como el representado en la figura 114, limitado por dos planos paralelos. Elijamos como eje OX una perpendicular a dichos planos y designemos por a y b las abscisas correspondientes a sus intersecciones con ellos.

Dividamos al intervalo (a, b) en n subintervalos (en la figura, $n = 4$) mediante los puntos de abscisas

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$$

Dichos subintervalos serán

$$(a, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad (x_2, x_3), \quad \ldots, \quad (x_{n-1}, b)$$

y sus amplitudes,

$$\Delta_1 = x_1 - a, \quad \Delta_2 = x_2 - x_1, \quad \Delta_3 = x_3 - x_2, \quad \ldots, \quad \Delta x_n = b - x_{n-1}$$

Por los puntos de abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, tracemos luego planos perpendiculares al eje OX, con lo que el cuerpo quedará dividido en n rebanadas. La suma de los volúmenes de dichas rebanadas será igual al volumen del cuerpo.

Los subintervalos pueden obtenerse siempre de tal modo que el área de la sección normal varíe en un mismo sentido (aumente o disminuya constantemente, o se mantenga igual). Bastará para ello formar un número suficiente de esos intervalos parciales.

Consideremos aislada una de las citadas rebanadas (fig. 115), y supongamos que las áreas de las secciones normales disminuyen a medida que crece la abscisa. El volumen de dicha rebanada está comprendido entre los cilindros de altura Δx_i y bases $S(x_{i-1})$ y $S(x_i)$, si representamos

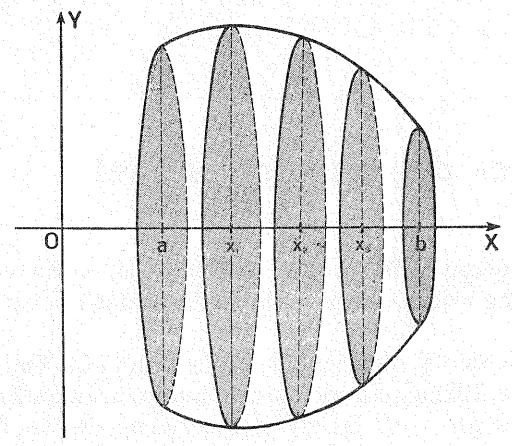

FIG. 114

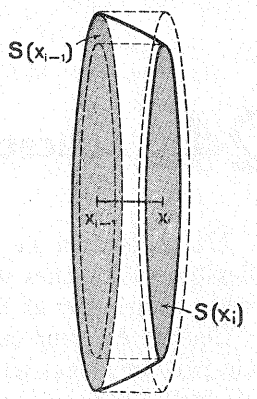

FIG. 115

por $S(x)$ el área de la sección producida en el cuerpo por el plano perpendicular a OX en el punto de abscisa x. Según esto, y representando por V_i el volumen de la rebanada en cuestión, tendremos

$$S(x_i) \cdot \Delta x_i < V_i < S(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i$$

Como para las n rebanadas podríamos escribir sendas limitaciones análogas a la anterior, el resultado de su suma sería

$$V_1 < V < V_2$$

si V_1 representa los volúmenes menores o interiores, V el volumen del cuerpo, y V_2 los volúmenes mayores o exteriores.

Pasando al límite, cuando el número n de subintervalos tiende a infinito, a la vez que cada uno de ellos Δx_i tiende a cero, resulta

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} S(x_i)\, \Delta x_i$$

o sea,

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\, dx} \qquad [1]$$

Por tanto, el problema de hallar el volumen de un cuerpo limitado por dos planos perpendiculares al eje OX, se resuelve determinando, en función de x, la expresión del área de la sección normal, calculando una primitiva de dicha función, y restando luego los valores de esta primitiva en los puntos b y a, extremos del intervalo.

173. Cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos sencillos. — A continuación aplicamos lo expuesto en el párrafo anterior a la determinación de algunos volúmenes sencillos.

I. VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE. — Sea una pirámide de base B y altura h (fig. 116). Consideremos a la altura como eje de abscisas y al vértice como centro de coordenadas, con lo que $a = 0$, $b = h$, y las secciones normales serán paralelas a la base.

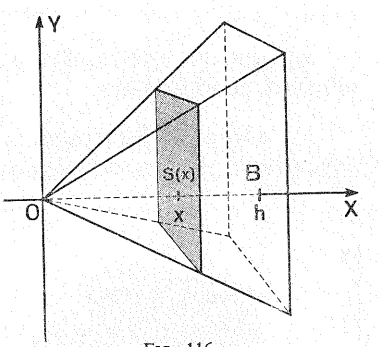

FIG. 116

Cortando por un plano perpendicular al eje OX, a la distancia x del vértice O, se obtiene una sección cuya superficie $S(x)$ se calcula así (*):

$$\frac{S(x)}{B} = \frac{x^2}{h^2} \quad \text{de donde} \quad S(x) = B\frac{x^2}{h^2}$$

Por consiguiente, el volumen de la pirámide lo hallaremos por la integral [1], y resulta

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h B\frac{x^2}{h^2}\,dx = \frac{B}{h^2}\int_0^h x^2 dx =$$

$$= \frac{B}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{B}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3}Bh$$

que es la fórmula que ya conocíamos.

II. VOLUMEN DE LOS CUERPOS DE REVOLUCIÓN. — En el caso particular de que el cuerpo cuyo volumen queremos hallar sea de revolución alre-

(*) Aplicamos el teorema de Geometría que dice: *Si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base, las áreas de la sección y de la base son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice.*

dedor del eje OX, si la curva que limita el plano que gira (fig. 117) tiene por ecuación $y = f(x)$, el área de la sección producida por un plano perpendicular a OX en un punto de abscisa x, es la de un círculo de radio $f(x)$; es decir, será

$$S(x) = \pi [f(x)]^2$$

En consecuencia, el volumen del cuerpo vendrá expresado por

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

Apliquemos este resultado a los cuerpos de revolución más conocidos: cilindro, cono y esfera.

1) *Cilindro.* Recordemos que cilindro de revolución es el cuerpo engendrado por un rectángulo al girar sobre uno de sus lados como eje.

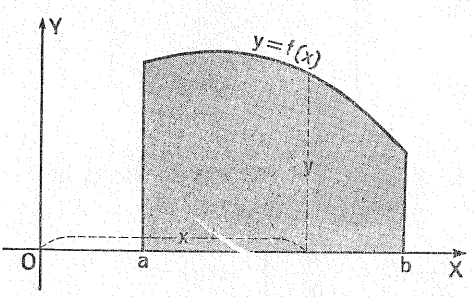

FIG. 117

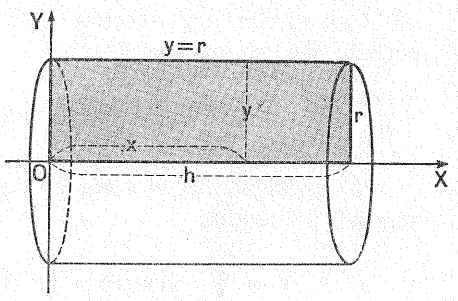

FIG. 118

Situando al rectángulo como indica la figura 118, tendremos que la ecuación del lado generatriz es $y = r$, por lo que el volumen engendrado será

$$V = \int_0^h \pi r^2 \, dx = \pi r^2 \int_0^h dx = \left[\pi r^2 x \right]_0^h = \pi r^2 h$$

2) *Cono.* Cono de revolución es el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos como eje.

Considerando el triángulo rectángulo tal como indica la figura 119, la ecuación del lado generatriz OA es $y = \dfrac{rx}{h}$, puesto que para todos sus puntos se verifica

$$\frac{y}{x} = \frac{r}{h} \quad \text{de donde} \quad y = \frac{rx}{h}$$

por lo que el volumen del cono será

$$V = \int_0^h \pi \frac{r^2x^2}{h^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \left[\frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\right]_0^h = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

que coincide con la fórmula que ya conocemos.

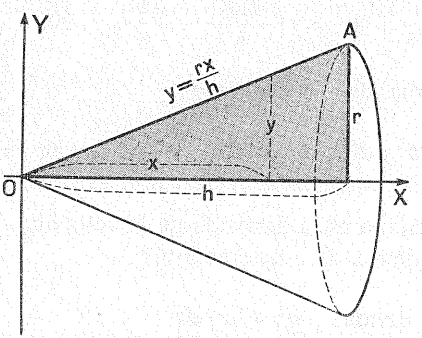

FIG. 119

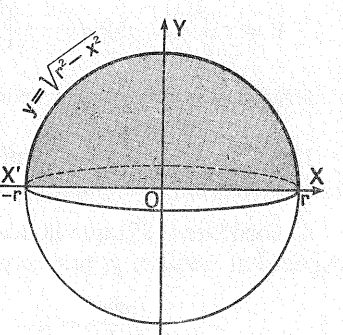

FIG. 120

3) *Esfera.* Esfera es el cuerpo engendrado por un semicírculo al girar en torno al diámetro que lo limita.

La circunferencia de radio r cuyo centro es el origen de coordenadas, tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{de donde} \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Por tanto, la ecuación de la semicircunferencia superior (fig. 120) es

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

y el volumen engendrado por el semicírculo que limita, será

$$V = \int_{-r}^{r} \pi\,(\sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx = \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

EJEMPLO 1.º — Hallar el volumen del cono engendrado al girar alrededor de OX el triángulo formado por el eje OX, la ordenada correspondiente a $x = 7$ y la recta de ecuación $y = 3x$.

En este caso, $a = 0$, $b = 7$ y $f(x) = 3x$; luego, el volumen será

$$V = \int_0^7 \pi (3x)^2 \, dx = 9\pi \int_0^7 x^2 \, dx = 9\pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^7 = 9\pi \frac{343}{3} = 1.029\pi$$

(Compruébese geométricamente este resultado).

EJEMPLO 2.º — Calcular por integración el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio limitado por la recta $y = 2x + 5$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 1$ y $x = 4$.

Como $a = 1$, $b = 4$ y $f(x) = 2x + 5$, el volumen pedido será

$$V = \pi \int_1^4 (2x+5)^2 \, dx = \pi \left[\frac{(2x+5)^3}{6}\right]_1^4 = \pi \left(\frac{2197}{6} - \frac{343}{6}\right) = 309\pi$$

(Hágase la comprobación geométrica de este resultado).

174. Estudio del movimiento uniformemente variado. — *Se llama movimiento uniformemente variado aquel cuya aceleración es constante.*

Recordemos (85) que la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, y, por consiguiente, se puede escribir

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{de donde} \quad dv = a \cdot dt$$

Integrando esta última igualdad, resulta

$$v = \int a \cdot dt = at + C \qquad [1]$$

Si ahora hacemos $t = 0$, se obtiene $v_0 = C$. Este valor v_0 es la llamada *velocidad inicial,* o sea, la velocidad que lleva el móvil en el momento de aplicarle la aceleración a. Sustituyendo en [1], resulta, por tanto,

$$v = at + v_0$$

Análogamente, si recordamos que la velocidad es la derivada del espacio respecto al tiempo, tendremos

$$v = \frac{ds}{dt} = at + v_0 \quad \text{de donde} \quad ds = (at + v_0)\, dt$$

e integrando, se obtiene

$$s = \int (at + v_0)\, dt = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + C = \tfrac{1}{2} at^2 + v_0 t + C \qquad [2]$$

Haciendo $t = 0$, resulta $s_0 = C$. Este valor s_0 se denomina *espacio inicial,* y representa el espacio que lleva recorrido el móvil cuando empieza a contarse el tiempo. Sustituyendo en [2], resulta, en definitiva:

$$s = \tfrac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0$$

que es la expresión general del espacio en el movimiento uniformemente variado.

175. Otras aplicaciones físicas del cálculo integral. — El cálculo integral es de uso frecuente en Física, no sólo en la cuestión que acabamos de ver referente a la Cinemática, sino en otras muchas.

Así, el trabajo mecánico producido por una fuerza variable viene expresado por una integral.

Supongamos un cuerpo que se mueve impulsado por una fuerza variable $f(x)$. Si dicha fuerza actúa en la dirección del movimiento a lo largo del intervalo (a, b) (fig. 121), podemos dividir a éste en n intervalos parciales mediante los puntos

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1}$$

y, entonces, el trabajo será la suma de los trabajos efectuados en cada uno de los subintervalos, es decir, vendrá expresado por

$$W = f(x_1)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_n)(b - x_{n-1})$$

o, más brevemente, por

$$W = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\, \Delta x_i$$

Haciendo que el número n de partes en que dividimos al intervalo (a, b) tienda a infinito, Δx_i será un infinitésimo, y la suma anterior se convierte en la integral

$$W = \int_a^b f(x)\, dx$$

FIG. 121

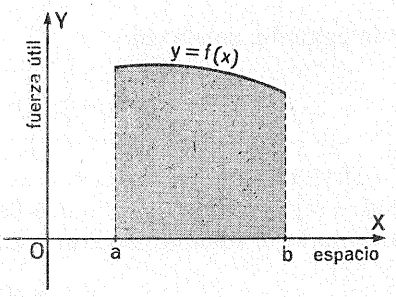

FIG. 122

La representación gráfica de este trabajo será el área del trapecio mixtilíneo limitado por la curva $f(x)$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = a$ y $x = b$ (fig. 122).

EJEMPLO. — El trabajo realizado por una fuerza $f(x) = (x+3)$ Kg. que actúa en la dirección del movimiento a lo largo del intervalo (2, 6), será

$$W = \int_2^6 (x+3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_2^6 = 36 - 8 = 28 \text{ kilográmetros}$$

Siguiendo un procedimiento análogo, se demuestra que el trabajo producido en la expansión isoterma de un gas, cuando pasa de un volumen v_1 a un volumen v_2, es

$$W = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv$$

en donde p representa la presión a que se halla sometido el gas.

Asimismo, la diferencia de potencial entre dos puntos A y B en el seno de un campo eléctrico E no uniforme y separados por la distancia l, viene dada por la expresión

$$V_A - V_B = \int_A^B E \cdot dl$$

Por estos ejemplos puede deducirse el gran interés que tiene el Cálculo integral en el estudio de la Física.

En general, siempre que se haya de determinar una cantidad de una magnitud física, variable entre ciertos límites, si es posible descomponerla en una suma de infinitos sumandos infinitésimos de tipo conocido $f(x) \cdot dx$ (elementos), podrá resolverse el problema mediante una integral.

EJERCICIOS

Calcular por integración el volumen engendrado por la rotación, alrededor del eje XX', *de las figuras limitadas por dicho eje y las líneas cuyas ecuaciones son:*

505. $y = 4,\ x = 2;\ x = 7$

506. $y = 3x,\ x = 0,\ x = 5$

507. $y = x + 5;\ x = 2,\ x = 7$

508. $y^2 = 9x,\ x = 0,\ x = 5$

509. $y = x^{\frac{3}{2}},\ x = 1,\ x = 3$

510. $y = \operatorname{sen} x,\ x = 0,\ x = \pi$

511. Hallar por integración el volumen engendrado por la rotación, alrededor del eje XX', del triángulo limitado por los ejes y la recta $4x + 3y = 12$. Comprobar el resultado geométricamente.

512. Calcular por integración el volumen engendrado por el triángulo A (0, 3), B (3, 5), C (6, 2) al girar sobre el eje XX'. Comprobar el resultado geométricamente.

513. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la figura limitada por las rectas $y = 2x + 3$, $x = 0$, $x = 3$ y el eje XX', al girar alrededor de éste.

514. Calcular por integración el volumen del cuerpo engendrado (elipsoide) por la superficie limitada por la semielipse y el eje mayor $2a$, al girar alrededor de éste.

515. Calcular el volumen del paraboloide engendrado por la parábola $y^2 = 2px$ al girar alrededor del eje XX', limitado por un plano perpendicular a dicho eje que dista 3 del origen.

516. Dada una pirámide de 8 cm. de altura y 36 cm² de área de la base, calcular por integración el volumen del tronco de pirámide comprendido entre dos planos paralelos a la base, distantes de ésta 3 y 5 cm.

517. La fórmula que da la velocidad de un móvil en metros por segundo es $v = 6t + 2$. Hallar por integración el espacio recorrido durante el tercer segundo.

518. Hallar el trabajo desarrollado por la fuerza $f(x) = (3x^2 + 2x - 1)$ Kg. a lo largo del intervalo (3, 11), suponiendo que actúa en la misma dirección del movimiento.

519. Calcular por integración el tiempo que tarda en vaciarse un depósito cilíndrico, cuya base tiene de área A, lleno de un líquido hasta la altura h, suponiendo que la operación se efectúa por un orificio de área B situado en el fondo del recipiente. Aplicación en el caso de ser $A = 2$ m², $h = 1'6$ m. y $B = 8$ cm². (Tomar $g = 9'8$ m./seg²).